УДК 512.532.2

Б. М. Верников

КВАЗИТОЖДЕСТВА В МОДУЛЯРНЫХ РЕШЕТКАХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП*

Введение

В работе М. В. Волкова [1] было анонсировано описание многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Доказательство этого результата «по модулю ниль-случая» опубликовано в работах [2–5], а доказательство в ниль-случае вместе с рядом более сильных результатов – в недавнем цикле статей [6–8]. В частности, в [6–8] показано, что в решетках многообразий полугрупп модулярность эквивалентна значительно более сильному (в абстрактных решетках) тождеству дезарговости.

В данной работе продолжается изучение тождеств и квазитождеств, влекущих модулярность, в решетках многообразий полугрупп. Напомним, что многообразие полугрупп называется *комбинаторным*, если все группы в нем тривиальны. В работе получено полное описание комбинаторных многообразий полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит произвольному наперед заданному квазимногообразию модулярных решеток. Эти результаты были анонсированы в [9] и (в более развернутом виде) в [10]. Отметим, что в [11] автором были получены аналогичные результаты о надкоммутативных многообразиях полугрупп. Другие квазитождества в решетках многообразий полугрупп, в некотором смысле противоположные квазитождествам, рассмотренным в данной работе и в работе [11], изучались в [12].

Хорошо известно, что класс всех многообразий, и тем более квазимногообразий, модулярных решеток континуален (см., например, [13, 14]). Оказывается, однако, что этот класс можно разбить на конечное число (а именно на шесть) подклассов, каждый из которых состоит из квазимногообразий «не различимых» в классе решеток подмногообразий комбинаторных многообразий полугрупп. Чтобы сформулировать этот факт более точно, нам понадобится ряд обозначений.

Обозначим решетки, изображенные на рис. 1 и 2, соответственно через M_k и $M_{k,n}$. Квазимногообразия, порожденные решетками M_k и $M_{k,n}$, обозначим

*Работа выполнена при поддержке межвузовской научной программы «Университеты России» Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 04.01.437) и президентской программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2227.2003.01).

через $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_{k,n}$ соответственно. Хорошо известно, что $\mathbf{M}_k$ в действительности является многообразием (см., например, [14, теорема 5.1.29]). Через **DIS** будем обозначать многообразие всех дистрибутивных решеток.

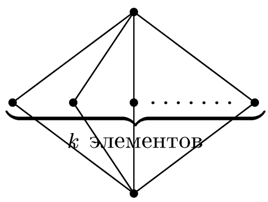

Рис. 1. Решетка M_k

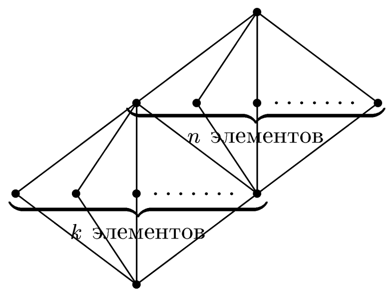

Рис. 2. Решетка $M_{k,n}$

Введем следующее отношение μ на классе всех нетривиальных квазимногообразий модулярных решеток: если $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ – два таких квазимногообразия, то $\mathbf{L}_1\,\mu\,\mathbf{L}_2$, если решетка подмногообразий произвольного комбинаторного многообразия полугрупп лежит в $\mathbf{L}_1$ тогда и только тогда, когда она лежит в $\mathbf{L}_2$. Ясно, что μ – отношение эквивалентности. Оказывается, что оно имеет всего шесть классов, а именно:

(i) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_{4,3} \subseteq \mathbf{L}\}$;

(ii) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_{3,3}, \mathbf{M}_4 \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_{4,3} \nsubseteq \mathbf{L}\}$;

(iii) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_{3,3} \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_4 \nsubseteq \mathbf{L}\}$;

(iv) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_4 \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_{3,3} \nsubseteq \mathbf{L}\}$;

(v) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_3 \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_4, \mathbf{M}_{3,3} \nsubseteq \mathbf{L}\}$;

(vi) $\{\mathbf{DIS}\}$.

Мы получим этот факт как следствие из результатов, дающих описание комбинаторных многообразий, решетки подмногообразий которых принадлежат квазимногообразиям, указанным в каждом из пп. (i)–(vi). В действительности два из шести соответствующих результатов уже известны. Мы имеем в виду результаты, относящиеся к квазимногообразиям решеток из пп. (i) и (vi). В [8] доказана μ-эквивалентность квазимногообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ и многообразия всех модулярных решеток (см. предложение 1.2 ниже). С учетом упомянутого в начале статьи результата работы [1] это решает обсуждаемую задачу для квазимногообразий из п. (i). Далее, описание комбинаторных многообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий непосредственно вытекает из описания многообразий нильполугрупп с тем же свойством, полученного в [15] (отметим, что этот факт был передоказан более простым способом в [16] и существенно усилен в [12]), и предложения 6.1 работы [8] (см. предложение 1.1 ниже). Остается рассмотреть квазимногообразия, указанные в пп. (ii)–(v), что и будет сделано в данной работе.

Работа состоит из пяти параграфов. В §1 собрана необходимая предварительная информация. В частности, в нем воспроизводятся результаты работ [17–19], на которые опираются все доказательства. Каждый из четырех последующих параграфов посвящен одному из μ-классов, указанных в пп. (ii)–(v).

1. Предварительные сведения

1.1. Конгруэнции на G-множествах

Для дальнейшего нам понадобится понятие G-множества. Пусть A – непустое множество, G – группа, а φ – гомоморфизм из G в группу всех перестановок множества A. Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие унарную операцию g^* на множестве A, задаваемую правилом $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Унарная алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ называется *G-множеством*. Решетка конгруэнций G-множества A обозначается через $\mathrm{Con}(A)$.

Напомним, что G-множество A называется *транзитивным*, если для любых $x, y \in A$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $y = g^*(x)$. Транзитивное G-подмножество G-множества A называется *орбитой* этого G-множества. Множество всех орбит G-множества A будем обозначать через $\mathrm{Orb}(A)$. Конгруэнцию α на A будем называть *жадной*, если для любых двух различных орбит $B, C \in \mathrm{Orb}(A)$ из того, что $b\alpha c$ для некоторых элементов $b \in B$ и $c \in C$, вытекает, что $x\alpha y$ для любых элементов $x, y \in B \cup C$. G-множество, все конгруэнции которого являются жадными, назовем *сегрегированным*. Совокупность всех жадных конгруэнций G-множества A будем обозначать через $\mathrm{GCon}(A)$. Нам понадобится следующий факт (см. [19, лемма 1.1 и предложение 1.2]).

Лемма 1.1. *Если A – произвольное G-множество, то* $\mathrm{GCon}(A)$ *– подрешетка решетки* $\mathrm{Con}(A)$*, изоморфная подпрямому произведению решеток конгруэнций всех орбит G-множества A и решетки эквивалентностей на множестве* $\mathrm{Orb}(A)$.

1.2. Строение решеток нильмногообразий полугрупп

Напомним, что многообразие полугрупп называется *нильмногообразием*, если оно удовлетворяет тождествам вида $x^n y = yx^n = x^n$ для некоторого натурального n. Всюду в дальнейшем, когда речь идет о нильмногообразиях, под словом «полугруппа» понимается полугруппа с сигнатурным нулем. Тем не менее все сказанное ниже справедливо и для обычных полугрупповых многообразий, поскольку, как показано в работе [20], решетка нильмногообразий полугрупп с сигнатурным нулем изоморфна решетке нильмногообразий в обычной полугрупповой сигнатуре.

Через F мы обозначаем абсолютно свободную полугруппу счетного ранга над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Символ $\equiv$ обозначает равенство в F. Если $u \in F \setminus \{0\}$, то $\ell(u)$ – длина слова u, $c(u)$ – множество всех букв, входящих в запись u, а $n(u) = |c(u)|$.

Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а m – натуральное число. Положим

$$F_m(\mathcal{V}) = \{u \in F \mid c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \text{ и } u \text{ не равно } 0 \text{ в } \mathcal{V}\}.$$

Далее, пусть $W_m(\mathcal{V})$ – произвольное подмножество в $F_m(\mathcal{V})$ со следующим свойством: для каждого слова $u \in F_m(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно, слово $u^* \in W_m(\mathcal{V})$ такое, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = u^*$. Положим

$$W_m^0(\mathcal{V}) = W_m(\mathcal{V}) \cup \{0\}.$$

Множество $W_m(\mathcal{V})$ будем называть *большой трансверсалью*, а множество $W_m^0(\mathcal{V})$ – *большой 0-трансверсалью.*

Через $\mathbf{S}_m$ будем обозначать группу всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Если $u \in F$, $c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то через σu будем обозначать образ слова u при автоморфизме полугруппы F, индуцированном σ, т. е. продолжающем отображение $x_i \longmapsto x_{i\sigma}$ (мы считаем, что $i\sigma = i$ при $i > m$). Ясно, что если $u \in F_m(\mathcal{V})$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то и $\sigma u \in F_m(\mathcal{V})$ и потому мы можем рассматривать слово $(\sigma u)^*$.

Зафиксируем произвольную большую трансверсаль $W_m(\mathcal{V})$ в $F_m(\mathcal{V})$ и для каждой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_m$ зададим унарную операцию σ^* на множестве $W_m^0(\mathcal{V})$ следующим правилом:

$$\sigma^*(u) \equiv (\sigma u)^* \text{ для всякого слова } u \in W_m(\mathcal{V}) \text{ и } \sigma^*(0) \equiv 0.$$

Легко проверить (см. [18, лемма 1]), что множество $W_m^0(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbf{S}_m\}$ является $\mathbf{S}_m$-множеством.

Обозначим через ν вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую многообразию $\mathcal{V}$. Для произвольной вполне инвариантной конгруэнции α на F, содержащей ν, обозначим через α_m ограничение α на $W_m^0(\mathcal{V})$. Легко понять, что α_m – конгруэнция $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$ (см. [18]). Обозначим множество всех конгруэнций вида α_m через $C_m(\mathcal{V})$. Как проверено в [18], множество $C_m(\mathcal{V})$ является подрешеткой в решетке $\mathrm{Con}(W_m^0(\mathcal{V}))$.

Как обычно, будем обозначать через $L(\mathcal{V})$ решетку подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$. Как показано в [18], если $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, то решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $C_m(\mathcal{V})$ по всем натуральным m.

В случае когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому дополнительному ограничению, строение решетки $C_m(\mathcal{V})$ можно уточнить. Чтобы сформулировать соответствующий результат, понадобится ряд определений и обозначений.

Пусть m и n – натуральные числа и $m \leqslant n$. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ назовем (n,m)-*расщепляемым*, если из выполнимости в $\mathcal{V}$ тождества $u = v$, где $n(u) = m$, $\ell(u) = n$ и $\ell(v) > n$, вытекает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = 0$. Многообразие, являющееся (n,m)-расщепляемым для всех $n \geqslant m$, назовем m-*однородным.* Многообразие, которое m-однородно для всех натуральных m, будем называть *однородным. Наследственно m-однородным* (*наследственно однородным*) будем называть многообразие, все подмногообразия которого m-однородны (однородны). Легко понять, что всякое наследственно однородное многообразие состоит из нильполугрупп.

Обозначим через $F_{n,m}(\mathcal{V})$ множество всех слов длины n из $F_m(\mathcal{V})$, а через $W_{n,m}(\mathcal{V})$ – множество всех слов длины n из $W_m(\mathcal{V})$. Положим

$$W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \cup \{0\}.$$

Множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *трансверсалью*, а множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ – 0-*трансверсалью.* Если $1 < m < n$, то $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *собственной трансверсалью*, а $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ – *собственной* 0-*трансверсалью.*

Легко проверить, что если многообразие $\mathcal{V}$ (n,m)-расщепляемо (в частности, если оно m-однородно), то $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ является $\mathbf{S}_m$-подмножеством в $W^0_m(\mathcal{V})$, а $W_{n,m}(\mathcal{V})$ – $\mathbf{S}_m$-подмножеством в $W_m(\mathcal{V})$ (это вытекает, например, из [17, доказательство леммы 1.1]). В [18] показано, что если $\mathcal{V}$ – наследственно m-однородное нильмногообразие, то решетка $C_m(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ по всем $n \geqslant m$. Отсюда, в частности, вытекает, что решетка подмногообразий наследственно однородного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ по всем n и m таким, что $m \leqslant n$.

Напомним, что многообразие полугрупп называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет *перестановочному* тождеству, т. е. тождеству вида

$$x_1x_2\cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi}\cdots x_{n\pi}, \tag{1.1}$$

где π – перестановка из $\mathbf{S}_n$. Число n называется *длиной* тождества (1.1). Тождество (1.1) (при фиксированных n и π) будем для краткости обозначать через $p_n[\pi]$. Если $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп, а n – натуральное число, то через $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ обозначается множество всех перестановок $\pi \in \mathbf{S}_n$ таких, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $p_n[\pi]$. Ясно, что $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ – подгруппа в $\mathbf{S}_n$.

Как обычно, через $\mathrm{Sub}(G)$ будем обозначать решетку подгрупп группы G. Если x и y – элементы решетки L и $x \leqslant y$, то через $[x, y]$ обозначается интервал в L с наименьшим элементом x и наибольшим элементом y. В дальнейшем нам пригодится следующий факт (см. [16, следствие 1.7]).

Лемма 1.2. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а n – натуральное число такое, что $n \geqslant 2$. Если $W_{n,n}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то $W_{n,n}(\mathcal{V})$ является $\mathbf{S}_n$-множеством, решетка конгруэнций которого изоморфна интервалу $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}), \mathbf{S}_n]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ и антиизоморфна некоторому интервалу решетки $L(\mathcal{V})$.*

1.3. Решетка подгрупп группы $\mathbf{S}_4$

Если $\pi \in \mathbf{S}_n$, то через $\mathrm{gr}\{\pi\}$ мы будем обозначать подгруппу в $\mathbf{S}_n$, порожденную π. Зафиксируем обозначения для ряда подгрупп группы $\mathbf{S}_4$:

$\mathbf{A}_4$ – знакопеременная подгруппа в $\mathbf{S}_4$;
$C_{ijk} = \mathrm{gr}\{(ijk)\}$, где $1 \leqslant i, j, k \leqslant 4$;
$C_{ijk\ell} = \mathrm{gr}\{(ijk\ell)\}$, где $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant 4$;
T – единичная группа;
$P_{ij,k\ell} = \mathrm{gr}\{(ij)(k\ell)\}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, $1 \leqslant k < \ell \leqslant 4$ и $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \varnothing$;
$\mathrm{Stab}_4(i) = \{\sigma \in \mathbf{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$, где $1 \leqslant i \leqslant 4$;
$T_{ij} = \mathrm{gr}\{(ij)\}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 4$;
$\mathbf{V}_4$ – четверная группа Клейна.

В дальнейшем нам понадобится информация о решетках вида $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ при $n \leqslant 4$. Очевидно, что если $n \leqslant 2$, то решетка $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ состоит из n элементов (в частности, дистрибутивна). Хорошо известно и легко проверяется, что $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_3) \cong M_4$. Решетка $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_4)$ изображена на рис. 3.

1.4. Следствия некоторых тождеств

Если $u, v \in F$, то будем писать $u \lhd v$, если $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторых (возможно, пустых) слов a и b и некоторого эндоморфизма ξ на F. В дальнейшем нам часто придется использовать следующие два технических замечания о тождествах нильполугрупп. Первое из них вытекает из [21, лемма 1], а второе – из [16, лемма 1.3(iii)].

Лемма 1.3. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие.*

(i) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x_1 x_2 \cdots x_n = v$, где $\ell(v) \neq n$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$.*

(ii) *Если $\mathcal{V}$ перестановочно и удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \lhd v$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет и тождеству $u = 0$.*

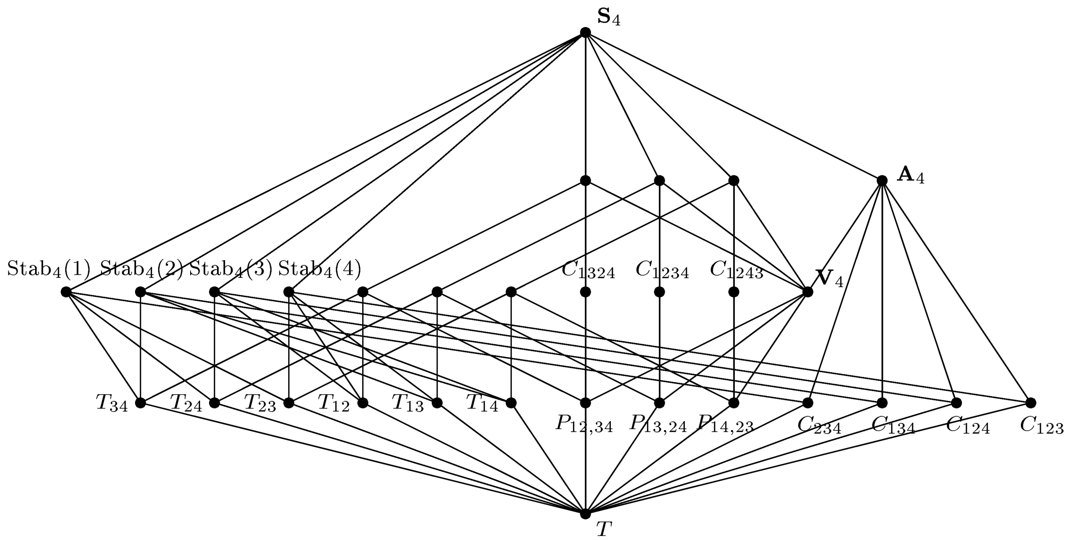

Рис. 3. Решетка $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_4)$

В следующей лемме собраны три следствия результатов работы [22].

Лемма 1.4. *Пусть $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп.*

(i) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $p_3[\pi]$, то для всякого $n \geqslant 4$ интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}), \mathbf{S}_n]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ содержит $\leqslant 2$ элементов.*

(ii) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $p_4[\pi]$, где π – одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23), *то для всякого $n \geqslant 5$ интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}), \mathbf{S}_n]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$ содержит $\leqslant 2$ элементов.*

(iii) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет перестановочному тождеству длины* 3 *и тождеству вида $p_4[\pi]$, где π – одна из перестановок* (12)(34), (13)(24), (14)(23), *то $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V}) = \mathrm{Sub}(\mathbf{S}_4)$.*

1.5. Редукция к нильслучаю

Обозначим через $\mathcal{C}$ многообразие, заданное тождествами $x^2 = x^3$, $xy = yx$, через $\mathcal{SL}$ – многообразие всех полурешеток, а через $\mathcal{T}$ – тривиальное многообразие. Следующее утверждение, доказанное в [8, предложение 6.1], сводит задачу описания комбинаторных многообразий полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит произвольному наперед заданному квазимногообразию модулярных решеток, к рассмотрению нильмногообразий.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{V}$ – комбинаторное многообразие полугрупп, а $\mathbf{L}$ – нетривиальное квазимногообразие модулярных решеток. Решетка $L(\mathcal{V})$ лежит в $\mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из трех условий:*

(i) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$xy = (xy)^2, \tag{1^m}$$
$$xy = x^2y,\ (xy)^2 = xy^2,\ xyzt = xyxzt, \tag{2^m}$$
$$xy = xy^2,\ (xy)^2 = x^2y,\ xyzt = xytzt; \tag{3^m}$$

(ii) *$\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0 \tag{1.2}$$

и $L(\mathcal{M}) \in \mathbf{L}$;

(iii) *$\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F}$ – одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{N}$ – нильмногообразие такое, что $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$.*

1.6. Нильслучай: общие замечания

Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие. Предположим, что множество $C_m(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$, т. е. что $C_m(\mathcal{V})$ является подрешеткой в $\mathrm{GCon}(W_m^0(\mathcal{V}))$. В силу леммы 1.1 в этом случае решетка $C_m(\mathcal{V})$ вкладывается в прямое произведение решеток конгруэнций орбит $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$ и решетки эквивалентностей на множестве всех его орбит. Пусть C – образ решетки $C_m(\mathcal{V})$ при соответствующем изоморфном вложении. Проекцию C на решетку $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(W_m^0(\mathcal{V})))$ обозначим через $E_m(\mathcal{V})$, а если U – орбита $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$, то проекцию C на решетку конгруэнций U обозначим через $C_m^U(\mathcal{V})$. Отметим, что $\mathbf{S}_m$-множество $W_m^0(\mathcal{V})$ всегда содержит орбиту $\{0\}$. Мы будем обозначать ее через U_0. Напомним, что слово называется *линейным*, если всякая буква входит в его запись не более одного раза. Если $W_m^0(\mathcal{V}) \neq \{0\}$, то это $\mathbf{S}_m$-множество обязательно содержит орбиту, состоящую только из линейных слов (причем такая орбита единственна). Мы будем обозначать эту орбиту через U_1. Обозначим через $E'_m(\mathcal{V})$ множество всех отношений эквивалентности α из $E_m(\mathcal{V})$ таких, что $\{U_1\}$ является α-классом. Ясно, что $E'_m(\mathcal{V})$ – подрешетка в $E_m(\mathcal{V})$. Более того, легко понять, что решетка $E_m(\mathcal{V})$ получается из $E'_m(\mathcal{V})$ внешним присоединением единицы.

Если $\mathbf{L}$ – квазимногообразие решеток, то через $\mathbf{L}^\partial$ мы будем обозначать квазимногообразие, двойственное к $\mathbf{L}$. Из [8, доказательство леммы 6.14] вытекает

Лемма 1.5. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а $\mathbf{L}$ – квазимногообразие модулярных решеток, содержащее квазимногообразие $\mathbf{M}_3$. Предположим, что для всякого натурального n выполнено условие*

(i) *либо $W_{n,n}(\mathcal{V}) = \varnothing$, либо решетка конгруэнций $\mathbf{S}_n$-множества $W_{n,n}(\mathcal{V})$ лежит в $\mathbf{L}^{\partial}$,*

и для всякого натурального $m > 1$ выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

(ii) *многообразие $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно и для любого натурального $n > m$ либо $W_{n,m}(\mathcal{V}) = \varnothing$, либо $\mathbf{S}_m$-множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегировано и содержит не более двух орбит, а решетки конгруэнций всех его орбит лежат в $\mathbf{L}^{\partial}$;*

(iii) *решетка $C_m(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$ и либо $W_m(\mathcal{V}) = \varnothing$, либо решетка $E'_m(\mathcal{V})$ и решетки $C_m^U(\mathcal{V})$ для всех орбит U $\mathbf{S}_m$-множества $W_m(\mathcal{V})$ лежат в $\mathbf{L}^{\partial}$.*

Тогда $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$.

Лемма 1.2 показывает, что (в условиях леммы 1.5) вопрос о том, принадлежит ли решетка $\mathrm{Con}(W_{n,n}(\mathcal{V}))$ квазимногообразию $\mathbf{L}$, равносилен вопросу о том, принадлежит ли этому квазимногообразию интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}),\, \mathbf{S}_n]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$.

Лемма 1.6. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, а n – натуральное число.*

(i) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $p_3[\pi]$, то интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}),\, \mathbf{S}_n]$ дистрибутивен.*

(ii) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо тождеству вида $p_4[\pi]$, где π – одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), (1243), *либо паре тождеств вида $p_4[\pi]$, $p_4[\sigma]$, где $\{\pi, \sigma\}$ – одна из пар перестановок* $\{(12),(34)\}$, $\{(13),(24)\}$, $\{(14),(23)\}$, $\{(12)(34),(13)(24)\}$, *то интервал* $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}),\, \mathbf{S}_n]$ *принадлежит квазимногообразию $\mathbf{M}_4$.*

Доказательство. Можно считать, что $n \geqslant 3$, так как решетка $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_2)$ дистрибутивна.

(i) В условиях этого пункта группа $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{V})$ нетривиальна. При $n = 3$ остается учесть, что если H – нетривиальная подгруппа в $\mathbf{S}_3$, то интервал $[H,\, \mathbf{S}_3]$ содержит не более двух элементов. Если же $n > 3$, то в силу первого утверждения леммы 1.4 интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}),\, \mathbf{S}_n]$ также содержит не более двух элементов.

(ii) В условиях этого пункта группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп вида C_{ijk}, $C_{ijk\ell}$, $T_{ij} \vee T_{k\ell}$, $\mathbf{V}_4$. При $n = 4$ остается сослаться на рис. 3. Если $n = 3$, то достаточно учесть, что $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_3) \cong M_4$. Наконец, если $n \geqslant 5$, то в силу утверждения (ii) леммы 1.4 интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}), \mathbf{S}_n]$ содержит не более двух элементов.

1.7. Комбинаторные многообразия с модулярной решеткой подмногообразий

Из результатов работы [1] и следствия 6.2 работы [8] вытекает

Предложение 1.2. *Для комбинаторного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна;*

(ii) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$*;*

(iii) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет либо одной из систем тождеств (1^m)–(3^m), либо одной из следующих систем тождеств:*

$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = yx^2 = x^3y, \tag{4^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^3z,\ x^6 = x^7, \tag{5^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^2y^2z = xy^2z^2, \tag{6^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^2z^2, \tag{7^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx,\ xy^2 = yx^2, \tag{8^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yxy, \tag{9^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = yxy,\ xy^2 = yx^2, \tag{10^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xyx, \tag{11^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xy^2,\ xyx = yxy, \tag{12^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = yxy = yx^2, \tag{13^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = xy^2,\ x^4y = yx^4, \tag{14^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = yxy = xy^2,\ x^4y = yx^4, \tag{15^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xyx = x^2yx,\ x^3y = yx^3, \tag{16^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ xy^2 = yx^2,\ xyx = xyx^2,\ x^3y = yx^3, \tag{17^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xyx = yxy,\ x^3y = yx^3, \tag{18^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ xy^2 = xy^3,\ xyx = yxy,\ x^3y = yx^3, \tag{19^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy, \tag{20^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy,\ x^2yz = y^2zx, \tag{21^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy,\ x^2yz = yzyx, \tag{22^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy,\ xyxz = yzyx, \tag{23^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ x^3y = yx^3, \tag{24^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ x^3y = yx^3, \tag{25^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx, \tag{26^m}$$

$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxyz, \tag{27^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyzy = xzyz, \tag{28^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxzx, \tag{29^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxyz, \tag{30^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyzy = xzyz, \tag{31^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = xyzx, \tag{32^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzy, \tag{33^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = zxyz, \tag{34^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yzyx, \tag{35^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy, \tag{36^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = xyzx, \tag{37^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxzy, \tag{38^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = zxyz, \tag{39^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yzyx, \tag{40^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyzx = yxzy, \tag{41^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2, \tag{42^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2, \tag{43^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2,\ xyxz = yxzx, \tag{44^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx, \tag{45^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2,\ xyzx = yxzy, \tag{46^m}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy, \tag{47^m}$$

где

- *в системах* (4^m)–(47^m) σ *– тривиальная перестановка**;
- *в системах* (4^m)–(19^m) π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$;
- *в системе* (20^m) π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), $(12)(34)$, $(13)(24)$;
- *в системах* (21^m)–(23^m), (32^m)–(41^m), (46^m), (47^m) $\pi = (14)(23)$;
- *в системах* (24^m), (25^m) π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), $(12)(34)$;
- *в системах* (26^m)–(31^m), (44^m), (45^m) $\pi = (13)(24)$;
- *в системах* (42^m), (43^m) $\pi = (12)(34)$.

Для доказательства основных результатов данной работы нам потребуется более подробная информация о многообразиях, задаваемых системами тождеств (1^m)–(47^m).

*Разумеется, в рамках данного предложения тождество $p_4[\sigma]$ можно исключить из систем (4^m)–(47^m); оно включено в эти системы только для удобства формулирования некоторых дальнейших утверждений.

Из результатов работ [2, 4] и их доказательств (см. также [8]) легко вытекают следующие два факта:

Лемма 1.7. *Если многообразие полугрупп удовлетворяет системе тождеств* (4^m)*, где* π *и* σ *имеют смысл, указанный для этой системы в предложении* 1.2*, то* $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$*, где* $\mathcal{K}$ *– одно из многообразий* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{T}$*, а* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет тождествам* (1.2)*.*

Лемма 1.8. *Если многообразие полугрупп удовлетворяет одной из систем тождеств* (5^m)*–*(47^m)*, то* $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{F}$ *– одно из многообразий* $\mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{T}$*, а* $\mathcal{N}$ *– нильмногообразие.*

Из леммы 3 работы [3] вытекает

Лемма 1.9. *Если нильмногообразие* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет тождествам* (1.2)*, то решетка* $L(\mathcal{C} \vee \mathcal{M})$ *изоморфна подпрямому произведению* 3*-элементной цепи и решетки* $L(\mathcal{M})$*.*

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [23]).

Лемма 1.10. *Если* $\mathcal{N}$ *– нильмногообразие, то решетка* $L(\mathcal{SL} \vee \mathcal{N})$ *изоморфна прямому произведению* 2*-элементной цепи и решетки* $L(\mathcal{N})$*.*

В следующих двух леммах суммирована необходимая для дальнейшего информация, непосредственно вытекающая из выкладок, проделанных в [8].

Лемма 1.11. *Пусть* $\mathcal{V}$ *– нильмногообразие.*

1. *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств* (5^m)*, где* π *и* σ *имеют смысл, указанный для этой системы в предложении* 1.2*, то*

   (i) *при* $m > 1$ *и* $m \neq 3$ *многообразие* $\mathcal{V}$ *наследственно* m*-однородно, все непустые собственные трансверсали вида* $W_{n,m}(\mathcal{V})$ *сегрегированы и содержат не более двух орбит, а решетки конгруэнций всех их орбит дистрибутивны;*

   (ii) *решетка* $C_3(\mathcal{V})$ *состоит только из жадных конгруэнций* $\mathbf{S}_3$*-множества* $W_3^0(\mathcal{V})$*, и если* $W_3(\mathcal{V}) \neq \varnothing$*, то решетки* $C_3^U(\mathcal{V})$ *для всех орбит* U $\mathbf{S}_3$*-множества* $W_3(\mathcal{V})$ *дистрибутивны, а* $E_3'(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{3,3}$*.*

2. *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (6^m)*–*(25^m)*,* (27^m)*,* (28^m)*,* (30^m)*–*(35^m)*,* (37^m)*–*(40^m)*, где в системах* (24^m) *и* (25^m) π *– одна из перестановок* (123)*,* (124)*,* (134)*,* (234)*, а* σ *– тривиальная перестановка, а для всех остальных из только что перечисленных систем* π *и*

σ имеют смысл, указанный для этих систем в предложении 1.2, то $\mathcal{V}$ наследственно однородно, все непустые собственные трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегированы и содержат не более двух орбит, а решетки конгруэнций всех их орбит дистрибутивны.

3. *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (24^m), (25^m), (36^m), (41^m)–(43^m), (46^m), (47^m), где в системах (24^m) и (25^m) σ – тривиальная перестановка, а $\pi = (12)(34)$, а для всех остальных из только что перечисленных систем π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в предложении 1.2, то*

   (i) *при $m > 2$ многообразие $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно, все непустые собственные трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегированы и содержат не более двух орбит, если $W_{4,3}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то решетки конгруэнций всех орбит трансверсали $W_{4,3}(\mathcal{V})$ лежат в $\mathbf{M}_4$, а решетки конгруэнций всех орбит всех остальных непустых собственных трансверсалей вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ дистрибутивны;*

   (ii) *решетка $C_2(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций $\mathbf{S}_2$-множества $W_2^0(\mathcal{V})$, и если $W_2(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то решетки $C_2^U(\mathcal{V})$ для всех орбит U $\mathbf{S}_2$-множества $W_2(\mathcal{V})$ дистрибутивны, а $E_2'(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{3,3}$.*

4. *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (26^m), (29^m), (44^m), (45^m), где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в предложении 1.2, то*

   (i) *при $m > 2$ многообразие $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно, все непустые собственные трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегированы и содержат не более двух орбит, а решетки конгруэнций всех их орбит дистрибутивны;*

   (ii) *решетка $C_2(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций $\mathbf{S}_2$-множества $W_2^0(\mathcal{V})$, и если $W_2(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то решетки $C_2^U(\mathcal{V})$ для всех орбит U $\mathbf{S}_2$-множества $W_2(\mathcal{V})$ дистрибутивны, а $E_2'(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{3,3}$.*

Лемма 1.12. *Пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие.*

(i) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (5^m), где π и σ имеют смысл, указанный для этой системы в предложении 1.2, то всякое подмногообразие в $\mathcal{V}$, удовлетворяющее одному из тождеств*

$$x^3yz = 0, \tag{1.3}$$
$$x^2y^2z^2 = 0, \tag{1.4}$$

наследственно однородно.

(ii) *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (24^m), (26^m), (36^m), *где в системе* (24^m) π *– одна из перестановок* $(12)(34)$ *и* $(14)(23)$, *а* σ *– тривиальная перестановка, а в системах* (26^m) *и* (36^m) π *и* σ *имеют смысл, указанный для этих систем в предложении* 1.2, *то всякое подмногообразие в* $\mathcal{V}$, *удовлетворяющее одному из тождеств*

$$xy^2 = 0, \tag{1.5}$$

$$(xy)^2 = 0, \tag{1.6}$$

наследственно однородно.

2. Квазитождества, выполненные в M_4 и $M_{3,3}$, но не в $M_{4,3}$

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– квазимногообразие модулярных решеток, содержащее* $\mathbf{M}_4$ *и* $\mathbf{M}_{3,3}$, *но не содержащее* $\mathbf{M}_{4,3}$. *Для комбинаторного многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$;

(ii) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_4 \vee \mathbf{M}_{3,3}$;

(iii) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (1^m)–(31^m), (36^m), (41^m)–(45^m), *где*

- *в системах* (4^m)–(19^m) *либо* π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), (1243), *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (12)$, *а* $\sigma = (34)$; *либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$; *либо* $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$; *либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$;
- *в системе тождеств* (20^m) *либо* π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (12)$, *а* $\sigma = (34)$; *либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$; *либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$;
- *в системах* (21^m)–(23^m) *либо* $\pi = (1243)$, *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$; *либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$;
- *в системах* (24^m), (25^m) *либо* π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1243), *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (12)$, *а* $\sigma = (34)$; *либо* $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$; *либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$;
- *в системах* (26^m), (29^m), (44^m), (45^m) *либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$; *либо* $\pi = (1234)$, *а* σ *– тривиальная перестановка;*

- *в системах* (27^m), (28^m), (30^m), (31^m) *либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$; *либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$; *либо* $\pi = (1234)$, *а* σ – *тривиальная перестановка;*
- *в системах* (36^m), (41^m) $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$;
- *в системах* (42^m), (43^m) $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$.

Доказательство. Ввиду очевидности импликации (ii) $\longrightarrow$ (i) достаточно доказать импликации (i) $\longrightarrow$ (iii) $\longrightarrow$ (ii).

Импликация (i) $\longrightarrow$ (iii). Прежде чем переходить к конкретным выкладкам, приведем неформальные соображения, которые облегчат восприятие этих выкладок. Рассмотрения, проведенные в [8], показывают, что решетка $M_{4,3}$ появляется «внутри» решетки $L(\mathcal{V})$ для нильмногообразий $\mathcal{V}$ только как антиизоморфная копия интервала $[H, \mathbf{S}_4]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_4)$ в случае, когда H – подгруппа вида $P_{ij,k\ell}$ (здесь и ниже в данном абзаце $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$). Иными словами, это происходит, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $p_4[(ij)(k\ell)]$. Чтобы опуститься ниже в решетке квазимногообразий решеток, надо наложить на $\mathcal{V}$ более сильные перестановочные тождества длины 4. Глядя на рис. 3, легко понять, какие именно перестановочные тождества должны появляться: они должны соответствовать подгруппам, покрывающим $P_{ij,k\ell}$ в $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_4)$, т. е. подгруппам $C_{ikj\ell}$, $T_{ij} \vee T_{k\ell}$ и $\mathbf{V}_4$. Иными словами, тождество $p_4[(ij)(k\ell)]$ надо заменять либо на тождество $p_4[(ikj\ell)]$, либо на пару тождеств $p_4[(ij)]$, $p_4[(k\ell)]$, либо на пару тождеств $p_4[(12)(34)]$, $p_4[(13)(24)]$ (появление последней пары тождеств объясняется тем, что перестановки $(12)(34)$ и $(13)(24)$ порождают $\mathbf{V}_4$).

Перейдем к конкретным выкладкам. Прежде всего нам понадобится следующая лемма, «формализующая» то, о чем шла речь в предыдущем абзаце.

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathcal{N}$ – *нильмногообразие. Если квазимногообразие, порожденное решеткой* $L(\mathcal{N})$, *модулярно и не содержит* $M_{4,3}$, *то* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет либо тождеству вида* $p_4[\pi]$, *где* π – *одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), (1243), *либо паре тождеств вида* $p_4[\pi]$, $p_4[\sigma]$, *где* $\{\pi, \sigma\}$ — *одна из следующих пар перестановок:* $\{(12), (34)\}$, $\{(13), (24)\}$, $\{(14), (23)\}$, $\{(12)(34), (13)(24)\}$.

Доказательство. Можно считать, что $W_{4,4}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, так как в противном случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xyzt = 0$, а значит и любому перестановочному тождеству длины 4. В силу леммы 1.2 решетка $L(\mathcal{V})$ содержит интервал, антиизоморфный интервалу $[\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V}), \mathbf{S}_4]$. В частности, этот интервал модулярен и не изоморфен решетке $M_{3,4}$. Как видно из рис. 3, это означает, что группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит группу, порожденную либо одной из перестановок (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), (1243), либо одной из пар перестановок $\{(12), (34)\}$, $\{(13), (24)\}$, $\{(14), (23)\}$, $\{(12)(34), (13)(24)\}$. Это, очевидно, эквивалентно заключению леммы.

Приступим к непосредственному доказательству импликации (i) $\longrightarrow$ (iii). Пусть $\mathbf{L}$ – квазимногообразие решеток, удовлетворяющее посылке доказываемой теоремы, а $\mathcal{V}$ – комбинаторное многообразие полугрупп такое, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$. В силу предложения 1.1 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (i)–(iii) этого предложения. Дальнейшие рассуждения естественно распадаются на три случая.

Случай 1. $\mathcal{V}$ *удовлетворяет условию* (i) *предложения* 1.1. Иными словами, в $\mathcal{V}$ выполнена одна из систем тождеств (1^m)–(3^m). Поскольку все эти системы тождеств присутствуют в п. (iii) доказываемой теоремы, в этом случае доказывать нечего.

Случай 2. $\mathcal{V}$ *удовлетворяет условию* (ii) *предложения* 1.1. Иными словами, $\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождествам (1.2) и $L(\mathcal{M}) \in \mathbf{L}$. Ясно, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = x^3y$ и всем тем перестановочным тождествам, которые выполнены в $\mathcal{M}$. Осталось проверить, что $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождествам $p_4[\pi]$ и $p_4[\sigma]$, где либо π – одна из перестановок (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), (1243), а σ – тривиальная перестановка; либо $\pi = (12)$, а $\sigma = (34)$; либо $\pi = (13)$, а $\sigma = (24)$; либо $\pi = (14)$, а $\sigma = (23)$; либо $\pi = (12)(34)$, а $\sigma = (13)(24)$ (тогда из сказанного выше будет вытекать, что в $\mathcal{V}$ выполнена система тождеств (4^m) при тех ограничениях на π и σ, которые указаны для этой системы в п. (iii) доказываемой теоремы). Поскольку $L(\mathcal{M}) \in \mathbf{L}$, решетка $L(\mathcal{M})$ модулярна. В силу предложения 1.2 $\mathcal{M}$ удовлетворяет одной из систем тождеств, указанных в п. (iii) этой теоремы. Напомним, что $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождествам (1.2). В частности, $\mathcal{M}$ – нильмногообразие. Если $\mathcal{M}$ удовлетворяет одной из систем (1^m)–(3^m), то в силу утверждения (i) леммы 1.3 $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождеству $xy = 0$, а значит и любому перестановочному тождеству длины 4. Все остальные системы тождеств, указанные в п. (iii) предложения 1.2, содержат пару тождеств вида $p_4[\pi]$, $p_4[\sigma]$ при ограничениях на π и σ, указанных в п. (iii) предложения 1.2. Из леммы 2.1 легко вывести, что упомянутые только что ограничения на π и σ можно заменить на ограничения, указанные выше в данном абзаце. Продемонстрируем это на одном примере (все остальные случаи разбираются абсолютно аналогично). Предположим, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $p_4[\pi]$ и $p_4[\sigma]$, где $\pi = (12)(34)$, а σ – тривиальная перестановка. Ясно, что группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит группу $P_{12,34}$. С другой стороны, в силу леммы 2.1, группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ должна содержать одну из групп C_{1324}, C_{1234}, C_{1243}, $T_{12} \vee T_{34}$, $T_{13} \vee T_{24}$, $T_{14} \vee T_{23}$ и $\mathbf{V}_4$. Из рис. 3 видно, что если G – одна из групп C_{1234},

C_{1243}, $T_{13} \vee T_{24}$ и $T_{14} \vee T_{23}$, то $G \vee P_{12,34} = \mathbf{S}_4$. Следовательно, в любом случае $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп C_{1324}, $T_{12} \vee T_{34}$ и $\mathbf{V}_4$. Но это и означает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $p_4[\pi]$ и $p_4[\sigma]$ при тех ограничениях на π и σ, которые указаны в начале данного абзаца.

Случай 3. *$\mathcal{V}$ удовлетворяет условию* (iii) *предложения* 1.1. Иными словами, $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{SL}$, $\mathcal{N}$ – нильмногообразие и $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$. Многообразие $\mathcal{SL}$ удовлетворяет всем системам тождеств (5^m)–(45^m) (при любых π и σ). Поэтому достаточно показать, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем (5^m)–(31^m), (36^m), (44^m), (45^m) (при ограничениях на π и σ, указанных в п. (iii) доказываемой теоремы). Это позволяет всюду далее считать, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие. Ясно, что решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна, и потому $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств, указанных в п. (iii) предложения 1.2. Учитывая, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, и используя лемму 1.3, легко понять, что каждая из систем (1^m)–(3^m) влечет в $\mathcal{V}$ любую из систем (5^m)–(45^m) (при любых π и σ), а система (4^m) (при любых π и σ) влечет (5^m) (при тех же π и σ). Это позволяет далее считать, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (5^m)–(47^m) (при ограничениях на π и σ, указанных в п. (iii) предложения 1.2). Дальнейшие рассмотрения естественно распадаются на пять подслучаев.

Подслучай 3.1. *$\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем* (5^m)–(25^m) (*где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в предложении* 1.2). Все эти системы тождеств (но при других ограничениях на π и σ) присутствуют в п. (iii) доказываемой теоремы. Точно так же, как при разборе случая 2, из леммы 2.1 легко вывести, что ограничения на π и σ, указанные в п. (iii) предложения 1.2, можно заменить на ограничения, указанные в п. (iii) доказываемой теоремы.

Подслучай 3.2. *$\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем* (26^m)–(31^m), (44^m), (45^m) (*где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в предложении* 1.2). Ясно, что в этом случае $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит группу $P_{13,24}$. В силу леммы 2.1 $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп C_{1324}, C_{1234}, C_{1243}, $T_{12} \vee T_{34}$, $T_{13} \vee T_{24}$, $T_{14} \vee T_{23}$ и $\mathbf{V}_4$. Если G – одна из групп C_{1324}, C_{1243}, $T_{12} \vee T_{34}$ и $T_{14} \vee T_{23}$, то, как видно из рис. 3, $G \vee P_{12,34} = \mathbf{S}_4$. Следовательно, $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп C_{1234}, $T_{13} \vee T_{24}$ и $\mathbf{V}_4$. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (27^m), (28^m), (30^m) и (31^m), то мы приходим к ситуации, предусмотренной в п. (iii) доказываемой теоремы. То же можно сказать и в случае, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (26^m), (29^m), (44^m) и (45^m), а $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп C_{1234} и $T_{13} \vee T_{24}$. Если же $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (26^m), (29^m), (44^m) и (45^m), а $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V}) \supseteq \mathbf{V}_4$, то, как легко понять, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (24^m) и (25^m) при $\pi = (12)(34)$, а $\sigma = (13)(24)$. Мы вновь получили системы, присутствующие в п. (iii) доказываемой теоремы.

Подслучай 3.3. *$\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем* (32^m)–(41^m), *где*

$\pi = (14)(23)$, *а* σ *– тривиальная перестановка.* Ясно, что в этом случае $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит группу $P_{14,23}$. Как и в предыдущем подслучае, из леммы 2.1 с помощью рис. 3 выводится, что $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп C_{1243}, $T_{14} \vee T_{23}$ и $\mathbf{V}_4$. Отсюда вытекает, что мы пришли к ситуации, предусмотренной в п. (iii) доказываемой теоремы. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (36^m) и (41^m), а $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V}) \supseteq T_{14} \vee T_{23}$, то это видно непосредственно, а во всех остальных случаях надо еще учесть, что каждая из систем (32^m)–(41^m) (при фиксированных π и σ) влечет одну из систем (24^m) и (25^m) (при тех же π и σ).

Подслучай 3.4. $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем* (42^m), (43^m), *где* $\pi = (12)(34)$, *а* σ *– тривиальная перестановка.* Как и в случае 2, из леммы 2.1 и рис. 3 выводится, что группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп $C_{1324}, T_{12} \vee T_{34}$ и $\mathbf{V}_4$. Если $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V}) \supseteq \mathbf{V}_4$, то доказывать нечего. Предположим теперь, что $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп C_{1324} и $T_{12} \vee T_{34}$. Иными словами, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств

$$xyzt = ztyx, \tag{2.1}$$

$$xyzt = yxzt = xytz. \tag{2.2}$$

Системы (42^m) и (43^m) содержат одно из следующих двух тождеств:

$$x^2y = (xy)^2, \tag{2.3}$$

$$xy^2 = (xy)^2. \tag{2.4}$$

Каждая из систем (2.1) и (2.2) позволяет привести слово $(xy)^2$ к слову xy^2x. Поэтому системы (42^m) и (43^m) влекут в $\mathcal{V}$ тождества $xy^2 = xy^2x$ и $x^2y = xy^2x$ соответственно. В силу утверждения (ii) леммы 1.3 в $\mathcal{V}$ выполнено либо тождество (1.5), либо тождество

$$x^2y = 0. \tag{2.5}$$

Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (24^m), (25^m). Мы пришли к ситуации, предусмотренной в п. (iii) доказываемой теоремы.

Подслучай 3.5. $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем* (46^m), (47^m), *где* $\pi = (14)(23)$, *а* σ *– тривиальная перестановка.* Ясно, что в этом случае $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит группу $P_{14,23}$. Как и в подслучае 3.3, из леммы 2.1 и рис. 3 выводится, что группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп $C_{1243}, T_{14} \vee T_{23}$ и $\mathbf{V}_4$. Ясно, что каждая из систем (46^m), (47^m) влечет одну из систем (42^m), (43^m). Поэтому если $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V}) \supseteq \mathbf{V}_4$, то мы получаем системы тождеств, указанные в п. (iii) доказываемой теоремы. Если же $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит одну из групп C_{1243} и $T_{14} \vee T_{23}$, то, как и при рассмотрении подслучая 3.4, проверяется, что каждая из систем (46^m), (47^m) влечет в $\mathcal{V}$ одно из тождеств (1.5) и (2.5), и потому $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (24^m), (25^m). Таким образом, мы вновь получаем ситуацию, предусмотренную в п. (iii) доказываемой теоремы.

Импликация (iii) $\longrightarrow$ (ii). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^m)–(3^m), то достаточно сослаться на предложение 1.1 (при $\mathbf{L} = \mathbf{DIS}$).

Предположим теперь, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (4^m) (при значениях π и σ, указанных для этой системы в п. (iii) доказываемой теоремы). В силу леммы 1.7 $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{K}$ – одно из многообразий $\mathcal{C}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождествам (1.2). В силу леммы 1.9 осталось убедиться в том, что $L(\mathcal{M}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Отметим, что $\mathcal{M}$ – нильмногообразие, удовлетворяющее системе (4^m) (при значениях π и σ, указанных для этой системы в п. (iii) доказываемой теоремы). Используя утверждение (i) леммы 1.3, получаем, что в $\mathcal{M}$ выполнена система тождеств (5^m) (при тех же π и σ).

Предположим, наконец, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (5^m)–(31^m), (36^m), (41^m)–(45^m) (где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в п. (iii) доказываемой теоремы). В силу леммы 1.8 $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F}$ – одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{N}$ – нильмногообразие. В силу леммы 1.10 осталось убедиться в том, что $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{M}_4 \vee \mathbf{M}_{3,3}$.

Таким образом, далее можно считать, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем (5^m)–(31^m), (36^m) и (41^m)–(45^m) (где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в доказываемой теореме). Достаточно убедиться в том, что выполнена посылка леммы 1.5 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_4 \vee \mathbf{M}_{3,3}$. Выполнение условия (i) этой леммы вытекает из лемм 1.2 и 1.6. Остается убедиться в выполнении условий (ii) и (iii) леммы 1.5. Лемма 1.11 показывает, что достаточно убедиться в том, что в $\mathcal{V}$ выполнена одна из систем (5^m)–(47^m) (где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в предложении 1.2). Напомним, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем, указанных в начале данного абзаца. Почти для всех из этих систем требуемый нам вывод очевиден. Единственным исключением является случай, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (24^m) и (25^m), где либо $\pi = (1243)$, а σ – тривиальная перестановка, либо $\pi = (14)$, а $\sigma = (23)$. Рассмотрим этот случай. Поскольку системы (24^m) и (25^m) двойственны друг к другу, достаточно рассмотреть первую из них. В систему (24^m) входит тождество $x^2y = x^3y$. В силу утверждения (ii) леммы 1.3 в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (2.5). Если $\pi = (1243)$, то $xyxz = yzx^2 = zxyx = x^2zy = 0$ в $\mathcal{V}$. Если же $\pi = (14)$, а $\sigma = (23)$, то $xyxz = x^2yz = 0$ в $\mathcal{V}$. Итак, в любом случае в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $xyxz = 0$, а значит и тождество $xyxz = yzyx$. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе (35^m), где $\pi = (14)(23)$, а σ – тривиальная перестановка.

3. Квазитождества, выполненные в M_4, но не в $M_{3,3}$

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– произвольное квазимногообразие модулярных решеток, содержащее квазимногообразие* $\mathbf{M}_4$*, но не содержащее квазимногообразия* $\mathbf{M}_{3,3}$*. Для комбинаторного многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$;

(ii) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_4$;

(iii) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет либо одной из систем тождеств* (1^m)–(4^m), (6^m)–(25^m), (27^m), (28^m), (30^m), (31^m), (36^m), (41^m), *либо одной из систем тождеств*

$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^3z = x^4yz, \tag{1^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^3z,\ x^2y^2z^2 = x^3y^2z^2, \tag{2^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = x^2y^2z^2, \tag{3^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xy^2 = x^3y, \tag{4^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2, \tag{5^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = (xy)^2, \tag{6^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3 = (xy)^2, \tag{7^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = xy^3, \tag{8^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xy^2 = (xy)^2, \tag{9^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y = xy^2,\ xyxz = yxzx, \tag{10^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx, \tag{11^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = (xy)^2,\ xyxz = yxzx, \tag{12^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3 = (xy)^2,\ xyxz = yxzx, \tag{13^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxzx, \tag{14^{m4}}$$
$$p_4[\pi],\ p_4[\sigma],\ x^2y = xy^2 = (xy)^2,\ xyxz = yxzx, \tag{15^{m4}}$$

где

- *в системах* (4^m), (6^m)–(19^m) *и* (1^{m4})–(3^{m4}) *либо* π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), (1243), *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (12)$, *а* $\sigma = (34)$; *либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$; *либо* $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$; *либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$;
- *в системе* (20^m) *либо* π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (12)$, *а* $\sigma = (34)$; *либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$; *либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$;

- *в системах* (21^m)–(23^m) *либо* $\pi = (1243)$, *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$*; либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$*;*
- *в системах* (24^m) *и* (25^m) *либо* π *– одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1243), *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (12)$, *а* $\sigma = (34)$*; либо* $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$*;*
- *в системах* (27^m), (28^m), (30^m), (31^m) *и* (10^{m4})–(15^{m4}) *либо* $\pi = (1234)$, *а* σ *– тривиальная перестановка; либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$*; либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$*;*
- *в системах* (36^m) *и* (41^m) $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$*;*
- *в системах* (4^{m4})–(9^{m4}) $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$.

Доказательство. Ввиду очевидности импликации (ii) $\longrightarrow$ (i) достаточно доказать импликации (i) $\longrightarrow$ (iii) $\longrightarrow$ (ii).

Импликация (i) $\longrightarrow$ (iii). Как и в предыдущем параграфе, предварим конкретные выкладки неформальными соображениями, призванными облегчить восприятие этих выкладок. Рассмотрения, проведенные в [8], показывают, что решетка $M_{3,3}$ появляется «внутри» решетки $L(\mathcal{V})$ для нильмногообразий $\mathcal{V}$ только в двух случаях: как подрешетка в $M_{4,3}$ и как подрешетка решетки вида $E'_m(\mathcal{V})$. Первого варианта появления решетки $M_{3,3}$ можно избежать, если отталкиваться от тех многообразий, которые фигурируют в теореме 1. Второй вариант появления этой решетки возникает в тех и только в тех случаях, когда многообразие $\mathcal{V}$ не является наследственно однородным. Напомним, что $E'_m(\mathcal{V})$ – это некоторая подрешетка в решетке эквивалентностей на множестве всех орбит большой 0-трансверсали $W^0_m(\mathcal{V})$. Чтобы «избавиться» от $M_{3,3}$, надо сокращать число орбит этого $\mathbf{S}_m$-множества, т. е. «склеивать» различные его орбиты (элементами большой 0-трансверсали $W^0_m(\mathcal{V})$ являются полугрупповые слова; под склейкой орбит U и V этого $\mathbf{S}_m$-множества мы понимаем наложение на $\mathcal{V}$ тождества вида $u = v$, где $u \in U$, а $v \in V$). То, какие именно орбиты надо склеивать, легко понять, глядя на рис. 5 и 7 работы [8].

Перейдем к конкретным выкладкам. Пусть $\mathbf{L}$ – квазимногообразие решеток, удовлетворяющее посылке доказываемой теоремы, а $\mathcal{V}$ – комбинаторное многообразие полугрупп такое, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$. Ясно, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L} \vee \mathbf{M}_{3,3}$, причем $\mathbf{L} \vee \mathbf{M}_{3,3}$ – квазимногообразие модулярных решеток, содержащее $\mathbf{M}_4$ и $\mathbf{M}_{3,3}$, но не содержащее $\mathbf{M}_{4,3}$. В силу теоремы 1 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств, указанных в п. (iii) этой теоремы. Сравнивая эти системы тождеств с теми, которые указаны в п. (iii) доказываемой теоремы, мы получаем, что, с учетом соображений двойственности, достаточно доказать следующие утверждения.

1. *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств* (5^m), *где либо* π – *одна из перестановок* (123), (124), (134), (234), (1324), (1234), (1243), *а* σ – *тривиальная перестановка; либо* $\pi = (12)$, *а* $\sigma = (34)$*; либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$*; либо* $\pi = (14)$, *а* $\sigma = (23)$*; либо* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$, *то* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (1^{m4})–(3^{m4}).
2. *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств* (24^m), *где* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$, *то* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (4^{m4})–(6^{m4}).
3. *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств* (26^m), *где либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$, *либо* $\pi = (1234)$, *а* σ – *тривиальная перестановка, то* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (10^{m4})–(12^{m4}).
4. *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств* (42^m), *где* $\pi = (12)(34)$, *а* $\sigma = (13)(24)$, *то* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (6^{m4}), (7^{m4}), (9^{m4}).
5. *Если* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств* (44^m), *где либо* $\pi = (13)$, *а* $\sigma = (24)$, *либо* $\pi = (1234)$, *а* σ – *тривиальная перестановка, то* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем тождеств* (12^{m4}), (13^{m4}), (15^{m4}).

Прежде всего заметим, что, как показано в [8], в условиях каждого из этих пяти утверждений $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – нильмногообразие. Ясно, что каждая из систем (1^{m4})–(15^{m4}) (при любых π и σ) выполнена в $\mathcal{SL}$. Поэтому далее можно предполагать, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие.

Докажем утверждение 1. Для этого достаточно установить, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо одному из тождеств (1.3) и (1.4), либо тождеству

$$x^3yz = x^2y^2z^2 \tag{3.1}$$

(при этом $\mathcal{V}$ будет удовлетворять одной из систем (1^{m4}), (2^{m4}) и (3^{m4}) соответственно). Ясно, что $\mathcal{V}$ содержится в многообразии, заданном системой тождеств (5^m), где π – одна из перестановок (123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23), а σ – тривиальная перестановка. Предположим, что $\mathcal{V}$ не удовлетворяет ни одному из тождеств (1.3), (1.4), (3.1). Тогда слова xyz, x^2yz, x^2y^2z, $x^2y^2z^2$ и x^3yz не равны нулю и попарно не равны друг другу в $\mathcal{V}$. Многообразие $\mathcal{V}$ не является наследственно однородным, поскольку тождество (3.1) не влечет в $\mathcal{V}$ ни одного из тождеств (1.3) и (1.4). Из рассмотрений, проведенных в [8], вытекает, что большая 0-трансверсаль $W_3^0(\mathcal{V})$ содержит ровно шесть орбит, а именно U_0, U_1, и следующие четыре орбиты: $U_2 \subseteq \{x^2yz, y^2xz, z^2xy\}$, $U_3 \subseteq \{x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x\}$, $U_4 = \{x^2y^2z^2\}$, $U_5 = \{x^3yz\}$. Но тогда, как проверено в [8], решетка $E_3'(\mathcal{V})$ имеет вид, указанный на рис. 4. На этом рисунке и ниже мы используем следующие обозначения для эквивалентностей на множестве орбит $\{U_0, U_1, \ldots, U_k\}$ $\mathbf{S}_m$-множества

$W_m^0(\mathcal{V})$: ε – отношение равенства; $\rho_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ – эквивалентность, единственным неодноэлементным классом которой является $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_r}\}$ (где $r \geqslant 2$ и $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant k$); $\rho_{i_1 i_2 \ldots i_r, j_1 j_2 \ldots j_s}$ – эквивалентность, имеющая ровно два неодноэлементных класса: $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_r}\}$ и $\{U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_s}\}$ (где $r, s \geqslant 2$, $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant k$, $0 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leqslant k$ и $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} = \varnothing$); $\Delta = \rho_{023\ldots k}$ (иными словами, Δ – наибольший элемент решетки $E'_m(\mathcal{V})$). Мы видим, что решетка $M_{3,3}$ вложима в $L(\mathcal{V})$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{M}_{3,3} \in \mathbf{L}$. Но это противоречит условию.

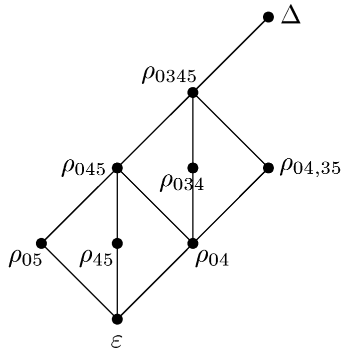

Рис. 4. Решетка E'_3 для системы (5^m)

Проверим теперь утверждение 2. Пусть $\mathcal{V}$ удовлетворяет посылке этого утверждения. Достаточно установить, что в $\mathcal{V}$ выполнено одно из тождеств (1.5), (1.6) и (2.4) (при этом $\mathcal{V}$ будет удовлетворять одной из систем (4^{m4}), (5^{m4}) и (6^{m4}) соответственно). Ясно, что $\mathcal{V}$ содержится в многообразии, заданном системой тождеств (24^m), где $\pi = (12)(34)$, а σ – тривиальная перестановка. Предположим, что $\mathcal{V}$ не удовлетворяет ни одному из тождеств (1.5), (1.6), (2.4). Тогда слова xy, x^2y, xyx и $(xy)^2$ не равны нулю и попарно не равны друг другу в $\mathcal{V}$. Многообразие $\mathcal{V}$ не является наследственно однородным, поскольку тождество (2.4) не влечет в $\mathcal{V}$ ни одного из тождеств (1.5) и (1.6). Из рассмотрений, проведенных в [8], вытекает, что большая 0-трансверсаль $W_2^0(\mathcal{V})$ содержит ровно пять орбит, а именно U_0, U_1, и следующие три орбиты: $U_2 = \{x^2y\}$, $U_3 \subseteq \{xyx, yxy\}$, $U_4 = \{(xy)^2\}$. Как показано в [8], это означает, что $E'_2(\mathcal{V})$ имеет вид, указанный на рис. 5. Следовательно, решетка $M_{3,3}$ вложима в $L(\mathcal{V})$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{M}_{3,3} \in \mathbf{L}$ вопреки условию.

Утверждения 3, 4 и 5 проверяются вполне аналогично утверждению 2.

Импликация (iii) $\longrightarrow$ (ii). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^m)–(3^m), то достаточно сослаться на предложение 1.1 (при $\mathbf{L} = \mathbf{DIS}$).

Предположим теперь, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе (4^m) (при значениях π

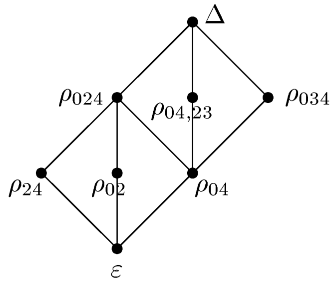

Рис. 5. Решетка E_2' для системы (24^m) при $\pi = (12)(34)$

и σ, указанных для этой системы в п. (iii) доказываемой теоремы). Повторяя рассуждения, проведенные в начале доказательства импликации (iii) $\longrightarrow$ (ii) теоремы 1, получаем, что можно считать, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие. Используя утверждение (i) леммы 1.3, получаем, что в $\mathcal{M}$ выполнена система (1^{m4}) (при тех же π и σ).

Предположим, наконец, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (6^m)–(25^m), (27^m), (28^m), (30^m), (31^m), (36^m), (41^m), (1^{m4})–(15^{m4}) (где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в п. (iii) доказываемой теоремы). Вновь повторяя рассуждения, проведенные в начале доказательства импликации (iii) $\longrightarrow$ (ii) теоремы 1, получаем, что и в этом случае можно считать, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие.

Итак, пусть $\mathcal{V}$ – нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств, указанных в предыдущем абзаце. Ясно, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств, указанных в предложении 1.2. Из лемм 1.5, 1.6 и 1.11 вытекает, что если $\mathcal{V}$ наследственно однородно, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_4$.

Пусть теперь $\mathcal{V}$ не является наследственно однородным. Ясно, что $\mathcal{V}$ содержится в не наследственно однородном многообразии, удовлетворяющем одной из систем тождеств, указанных в предложении 1.2. Из леммы 1.11 видно, что таковыми являются многообразия, заданные системами тождеств (5^m), (24^m)–(26^m), (29^m), (36^m) и (41^m), где в системах (24^m) и (25^m) $\pi = (12)(34)$, σ – тривиальная перестановка, а в остальных перечисленных только что системах π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в предложении 1.2. Сравнение указанных систем тождеств с теми, которые указаны в п. (iii) доказываемой теоремы, показывает, что мы должны рассмотреть системы тождеств (1^{m4})–(15^{m4}). С учетом леммы 1.12 и двойственного к ней утверждения круг систем, подлежащих проверке, сужается до систем (3^{m4}), (6^{m4}), (8^{m4}), (9^{m4}), (12^{m4}), (14^{m4}), (15^{m4}).

Итак, пусть $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе (3^{m4}) (где π и σ имеют смысл, указанный для этой системы в п. (iii) доказываемой теоремы). Ясно, что оно удовлетворяет также системе (5^m) (при тех же π и σ). Учитывая, что $\mathcal{V}$ задается тождеством (3.1) внутри многообразия, заданного системой (5^m), и используя выкладки, проделанные в [8], получаем, что решетка $E_3'(\mathcal{V})$ изоморфна интервалу $[\rho_{45}, \Delta]$ решетки, изображенной на рис. 4, и потому является цепью. Из лемм 1.5, 1.6 и 1.11 вытекает теперь, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_4$.

Пусть теперь $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе (6^{m4}) (при $\pi = (12)(34)$, а $\sigma = (13)(24)$). Ясно, что оно удовлетворяет также системе (24^m) (где $\pi = (12)(34)$, а σ – тривиальная перестановка). Учитывая, что $\mathcal{V}$ задается тождеством (2.4) внутри многообразия, заданного системой (24^m), и используя выкладки, проделанные в [8], получаем, что решетка $E_2'(\mathcal{V})$ изоморфна интервалу $[\rho_{24}, \Delta]$ решетки, изображенной на рис. 5, и потому является цепью. Из лемм 1.5, 1.6 и 1.11 вытекает теперь, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_4$.

Системы (8^{m4}), (9^{m4}), (12^{m4}), (14^{m4}), (15^{m4}) рассматриваются абсолютно аналогично системе (6^{m4}).

4. Квазитождества, выполненные в $M_{3,3}$, но не в M_4

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– квазимногообразие модулярных решеток, содержащее* $\mathbf{M}_{3,3}$*, но не содержащее* $\mathbf{M}_4$*. Для комбинаторного многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$;

(ii) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{3,3}$;

(iii) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет либо одной из систем тождеств* (1^m)–(3^m), *либо одной из следующих систем тождеств:*

$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2 = x^3y, \qquad (1^{m33})$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3yz = xy^3z,\ x^6 = x^7, \qquad (2^{m33})$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^2y^2z = xy^2z^2, \qquad (3^{m33})$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3yz = xy^2z^2, \qquad (4^{m33})$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = xy^2,\ x^4y = yx^4, \qquad (5^{m33})$$
$$p_3[\pi],\ xy^2 = yx^2,\ x^4y = yx^4, \qquad (6^{m33})$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ x^4y = yx^4, \qquad (7^{m33})$$
$$p_3[(13)],\ x^2y = xyx = x^3y, \qquad (8^{m33})$$
$$p_3[(13)],\ x^2y = xyx,\ x^3yz = xy^3z,\ x^6 = x^7, \qquad (9^{m33})$$
$$p_3[(13)],\ x^2y = xyx,\ x^2y^2z = xy^2z^2, \qquad (10^{m33})$$
$$p_3[(13)],\ x^2y = xyx,\ x^3yz = xy^2z^2, \qquad (11^{m33})$$

$p_3[(13)]$, $x^2y = yxy$, (12^{m33})
$p_3[(13)]$, $xyx = yxy$, (13^{m33})
$p_3[(123)]$, $x^2y = x^3y$, (14^{m33})
$p_3[(123)]$, $x^3yz = xy^3z$, $x^6 = x^7$, (15^{m33})
$p_3[(123)]$, $x^2y^2z = xy^2z^2$, (16^{m33})
$p_3[(123)]$, $x^3yz = xy^2z^2$, (17^{m33})

где

- *в системах* (1^{m33})–(6^{m33}) π *– одна из перестановок* (12) *и* (23);
- *в системе* (7^{m33}) π *– одна из перестановок* (12), (13), (23) *и* (123).

Доказательство. Ввиду очевидности импликации (ii) $\longrightarrow$ (i) достаточно доказать импликации (i) $\longrightarrow$ (iii) $\longrightarrow$ (ii).

Импликация (i) $\longrightarrow$ (iii). Решающим шагом в доказательстве этой импликации является следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– квазимногообразие решеток, не содержащее решетки* M_4*, а* $\mathcal{V}$ *– нильмногообразие. Если решетка* $L(\mathcal{V})$ *принадлежит* $\mathbf{L}$*, то* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет перестановочному тождеству длины* 3.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{V}$ не удовлетворяет никакому перестановочному тождеству длины 3. В частности, это означает, что множество $W_{3,3}(\mathcal{V})$ непусто, так как в противном случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xyz = 0$, а значит, и любому перестановочному тождеству длины 3. Далее, из нашего предположения вытекает, что $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{V})$ – единичная группа. В силу леммы 1.2 это означает, что решетка $L(\mathcal{V})$ содержит интервал, антиизоморфный решетке $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_3)$, которая изоморфна M_4. Но это противоречит условию леммы.

Приступим к непосредственному доказательству импликации (i) $\longrightarrow$ (iii). Пусть $\mathbf{L}$ – квазимногообразие решеток, удовлетворяющее посылке доказываемой теоремы, а $\mathcal{V}$ – комбинаторное многообразие полугрупп такое, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$. Ясно, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L} \vee \mathbf{M}_4$, причем $\mathbf{L} \vee \mathbf{M}_4$ – квазимногообразие модулярных решеток, содержащее $\mathbf{M}_4$ и $\mathbf{M}_{3,3}$, но не содержащее $\mathbf{M}_{4,3}$. В силу теоремы 1 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^m)–(31^m), (36^m), (41^m)–(45^m), где в системах (4^m)–(31^m), (36^m), (41^m)–(45^m) π и σ имеют смысл, указанный в п. (iii) теоремы 1.

Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^m)–(3^m), то достаточно сослаться на предложение 1.1 (при $\mathbf{L} = \mathbf{DIS}$). Пусть теперь в $\mathcal{V}$ выполнена одна из систем (4^m)–(31^m), (36^m), (41^m)–(45^m), где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в п. (iii) предложения 1.2. В силу леммы 4.1 в $\mathcal{V}$, кроме того, выполнено тождество вида $p_3[\pi]$, где π – одна из перестановок (12), (13), (23) и (123). Любая из этих четырех перестановок позволяет привести слово $(xy)^2$ к одному из слов x^2y^2, xy^2x, yx^2y. Отсюда и из утверждения (ii) леммы 1.3 вытекает

Лемма 4.2. *Если нильмногообразие удовлетворяет перестановочному тождеству длины* 3 *и одному из тождеств* (2.3) *и* (2.4)*, то оно удовлетворяет также тождеству* (1.6).

В частности, это означает, что каждая из систем (42^m)–(45^m) (при любых π и σ) влечет в $\mathcal{V}$ одну из систем (24^m), (25^m) (при тех же π и σ). Кроме того, очевидно, что каждая из систем (21^m)–(23^m), (26^m)–(31^m), (36^m), (41^m) (при любых π и σ) также влечет одну из систем (24^m), (25^m) (при тех же π и σ). Поэтому можно считать, что в $\mathcal{V}$ выполнена одна из систем (4^m)–(20^m), (24^m), (25^m), где π и σ имеют смысл, указанный для этих систем в п. (iii) предложения 1.2, а значит, и одна из следующих систем тождеств:

$$p_3[\pi],\ x^2y = xyx = yx^2 = x^3y, \tag{4^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^3z,\ x^6 = x^7, \tag{5^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^2y^2z = xy^2z^2, \tag{6^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^2z^2, \tag{7^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = xyx,\ xy^2 = yx^2, \tag{8^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yxy, \tag{9^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yxy,\ xy^2 = yx^2, \tag{10^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xyx, \tag{11^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = xy^2,\ xyx = yxy, \tag{12^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yxy = yx^2, \tag{13^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = xyx = xy^2,\ x^4y = yx^4, \tag{14^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yxy = xy^2,\ x^4y = yx^4, \tag{15^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ xyx = x^2yx,\ x^3y = yx^3, \tag{16^m}'$$
$$p_3[\pi],\ xy^2 = yx^2,\ xyx = xyx^2,\ x^3y = yx^3, \tag{17^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = x^3y,\ xyx = yxy,\ x^3y = yx^3, \tag{18^m}'$$
$$p_3[\pi],\ xy^2 = xy^3,\ xyx = yxy,\ x^3y = yx^3, \tag{19^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy, \tag{20^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ x^3y = yx^3, \tag{24^m}'$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ x^3y = yx^3, \tag{25^m}'$$

где π – одна из перестановок (12), (13), (23) и (123). Теперь доказательство импликации может быть завершено рутинной проверкой. Результаты этой проверки суммированы в следующей таблице. В этой таблице на пересечении каждой строки (кроме первой) и каждого столбца (кроме первого) указана та из систем, присутствующих в п. (iii) доказываемой теоремы, которая вытекает из системы, указанной в первом столбце данной строки при значении π, указанном в первой строке данного столбца.

	$\pi = (12)$	$\pi = (13)$	$\pi = (23)$	$\pi = (123)$
$(4^m)'$	(1^{m33})	(8^{m33})	(1^{m33})	(14^{m33})
$(5^m)'$	(2^{m33})	(9^{m33})	(2^{m33})	(15^{m33})
$(6^m)'$	(3^{m33})	(10^{m33})	(3^{m33})	(16^{m33})
$(7^m)'$	(4^{m33})	(11^{m33})	(4^{m33})	(17^{m33})
$(8^m)'$	(6^{m33})	(13^{m33})	(6^{m33})	(13^{m33})
$(9^m)'$	(7^{m33})	(13^{m33})	(7^{m33})	(13^{m33})
$(10^m)'$	(6^{m33})	(12^{m33})	(6^{m33})	(7^{m33})
$(11^m)'$	(7^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})
$(12^m)'$	(6^{m33})	(13^{m33})	(5^{m33})	(7^{m33})
$(13^m)'$	(5^{m33})	(12^{m33})	(5^{m33})	(7^{m33})
$(14^m)'$	(5^{m33})	(7^{m33})	(5^{m33})	(7^{m33})
$(15^m)'$	(5^{m33})	(12^{m33})	(5^{m33})	(7^{m33})
$(16^m)'$	(7^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})
$(17^m)'$	(6^{m33})	(7^{m33})	(6^{m33})	(7^{m33})
$(18^m)'$	(6^{m33})	(13^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})
$(19^m)'$	(6^{m33})	(13^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})
$(20^m)'$	(5^{m33})	(13^{m33})	(5^{m33})	(7^{m33})
$(24^m)'$	(6^{m33})	(7^{m33})	(6^{m33})	(7^{m33})
$(25^m)'$	(7^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})	(7^{m33})

Импликация (iii) $\longrightarrow$ (ii). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^m)–(3^m), то достаточно сослаться на предложение 1.1 (при $\mathbf{L} = \mathbf{DIS}$). Предположим теперь, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^{m33})–(17^{m33}) (где в системах (1^{m33})–(7^{m33}) π имеет смысл, указанный в п. (iii) доказываемой теоремы). Как и в доказательстве импликации (iii) $\longrightarrow$ (ii) теоремы 1, можно считать, что $\mathcal{V}$ – нильмногообразие. Очевидно, что каждая из систем (1^{m33})–(17^{m33}) влечет одну из систем $(5^m)'$–$(20^m)'$, $(24^m)'$, $(25^m)'$, где π – одна из перестановок (12), (13), (23) и (123). Из лемм 1.5, 1.6, 1.11 и 1.4 вытекает, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{3,3}$.

5. Квазитождества, выполненные в M_3, но не выполненные ни в M_4, ни в $M_{3,3}$

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– квазимногообразие модулярных решеток, содержащее* $\mathbf{M}_3$*, но не содержащее ни* $\mathbf{M}_4$*, ни* $\mathbf{M}_{3,3}$*. Для комбинаторного многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$*;*

(ii) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_3$*;*

(iii) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет либо одной из систем тождеств* (1^m)–(3^m), (1^{m33}), (3^{m33})–(8^{m33}), (10^{m33})–(14^{m33}), (16^{m33}), (17^{m33}), *либо одной из следующих систем тождеств:*

$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3yz = x^4yz, \tag{1^{m3}}$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^2y^2z^2 = x^3y^2z^2, \tag{2^{m3}}$$
$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3yz = x^2y^2z^2, \tag{3^{m3}}$$
$$p_3[(13)],\ x^2y = xyx,\ x^3yz = x^4yz, \tag{4^{m3}}$$
$$p_3[(13)],\ x^2y = xyx,\ x^2y^2z^2 = x^3y^2z^2, \tag{5^{m3}}$$
$$p_3[(13)],\ x^2y = xyx,\ x^3yz = x^2y^2z^2, \tag{6^{m3}}$$
$$p_3[(123)],\ x^3yz = x^4yz, \tag{7^{m3}}$$
$$p_3[(123)],\ x^2y^2z^2 = x^3y^2z^2, \tag{8^{m3}}$$
$$p_3[(123)],\ x^3yz = x^2y^2z^2, \tag{9^{m3}}$$

где

- *в системах* (1^{m33}), (3^{m33})–(6^{m33}) *и* (1^{m3})–(3^{m3}) π *– одна из перестановок* (12) *и* (23)*;*
- *в системе* (7^{m33}) π *– одна из перестановок* (12), (13), (23) *и* (123).

Доказательство. Ввиду очевидности импликации (ii) $\longrightarrow$ (i) достаточно доказать импликации (i) $\longrightarrow$ (iii) $\longrightarrow$ (ii).

Импликация (i) $\longrightarrow$ (iii). Пусть $\mathbf{L}$ – квазимногообразие решеток, удовлетворяющее посылке доказываемой теоремы, а $\mathcal{V}$ – комбинаторное многообразие полугрупп такое, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$. Ясно, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L} \vee \mathbf{M}_{3,3}$, причем $\mathbf{L} \vee \mathbf{M}_{3,3}$ – квазимногообразие модулярных решеток, содержащее $\mathbf{M}_{3,3}$, но не содержащее $\mathbf{M}_4$. В силу теоремы 2 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств, указанных в п. (iii) этой теоремы. Сравнивая эти системы тождеств с теми, которые указаны в п. (iii) доказываемой теоремы, мы получаем, что достаточно доказать следующее утверждение:

если $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из систем* (2^{m33}), *где* π *– одна из перестановок* (12) *и* (23), (9^{m33}) *и* (15^{m33}), *то оно удовлетворяет одному из тождеств* (1.3), (1.4), (3.1).

Мы позволим себе опустить проверку этого утверждения, поскольку она дословно повторяет рассуждения, проведенные при проверке утверждения 1 в доказательстве импликации (i) $\longrightarrow$ (iii) теоремы 2.

Импликация (iii) $\longrightarrow$ (ii). Эта импликация доказывается вполне аналогично одноименной импликации теоремы 2. Отличие состоит лишь в том, что в доказываемой теореме необходимые выкладки существенно проще и короче.

Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^m)–(3^m), то, как и во всех предшествующих теоремах, достаточно сослаться на предложение 1.1 (при $\mathbf{L} = \mathbf{DIS}$). Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^{m33}), (3^{m33})–(8^{m33}), (10^{m33})–(14^{m33}), (16^{m33}) и (17^{m33}) (где в системах (1^{m33}) и (3^{m33})–(7^{m33}) π имеет смысл, указанный для этих систем в п. (iii) доказываемой теоремы), то, как вытекает из доказательства импликации (iii) $\longrightarrow$ (ii) теоремы 3, $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_3$. Пусть, наконец, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем (1^{m3})–(9^{m3}), где в системах (1^{m3})–(3^{m3}) π – одна из перестановок (12) и (23). Это означает, что в $\mathcal{V}$ выполнены система тождеств $(5^m)'$ и одно из тождеств (1.3), (1.4), (3.1). Из утверждения (i) леммы 1.12 вытекает, что если в $\mathcal{V}$ выполнено одно из тождеств (1.3), (1.4), то $\mathcal{V}$ наследственно однородно. Но тогда, как видно из лемм 1.5, 1.6, 1.11 и 1.4, $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_3$. Наконец, предположим, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (3.1). Повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве импликации (iii) $\longrightarrow$ (ii) теоремы 2 при рассмотрении системы тождеств (3^{m4}), получаем, что в рассматриваемом случае решетка $E_3'(\mathcal{V})$ является цепью. Вновь ссылаясь на леммы 1.5, 1.6, 1.11 и 1.4, получаем, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_3$.

Литература

1. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.
2. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Изв. вузов. Математика. 1989. № 6. С. 48–58.
3. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II // Там же. 1992. № 7. С. 3–8.
4. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III // Там же. № 8. С. 21–29.
5. Volkov M. V., Ershova T. A. The lattice of varieties of semigroups with completely regular square // Monash Conf. on Semigroup Theory in honour of G. B. Preston. Singapore: World Scientific, 1991. P. 306–322.
6. Верников Б. М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. С. 16–42. (Математика и механика. Вып. 4).

7. Волков М. В. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. С. 43–61. (Математика и механика. Вып. 4).
8. Верников Б. М., Волков М. В. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: завершение описания // Там же. 2004. № 30. С. 5–36. (Математика и механика. Вып. 6).
9. Vernikov B. M. A classification of lattice quasiidentities implying the modular law in lattices of nilsemigroup varieties // II Международ. конф. «Полугруппы: теория и прилож.» в честь проф. Е. С. Ляпина: Тез. докл. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. С. 58–59.
10. Верников Б. М. Квазитождества в модулярных решетках многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2003. № 8. С. 72–76.
11. Vernikov B. M. Distributivity, modularity, and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties // Semigroups with Applications, including Semigroup Rings. St Petersburg: St Petersburg State Techn. Univ., 1999. P. 411–439.
12. Vernikov B. M. Semidistributive law and other quasi-identities in lattices of semigroup varieties // Proc. of the Steklov Institute of Math. Suppl. 2. 2001. P. S241–S256.
13. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
14. Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. кн., 1999.
15. Volkov M. V. Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, pt. 3. P. 295–316.
16. Vernikov B. M., Volkov M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.
17. Верников Б. М., Волков М. В. Решетки нильпотентных многообразий полугрупп. II // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. С. 13–33. (Математика и механика. Вып. 1).
18. Верников Б. М., Волков М. В. Строение решеток многообразий нильполугрупп // Там же. 2000. № 18. С. 34–52. (Математика и механика. Вып. 3).
19. Vernikov B. M. On congruences of G-sets // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. Vol. 38, № 3. P. 603–613.
20. Nelson E. The lattice of equational classes of semigroups with zero // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, № 4. P. 531–534.
21. Сапир М. В., Суханов Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1981. № 4. С. 48–55.
22. Pollák Gy. On the consequences of permutation identities // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. Vol. 34. P. 323–333.
23. Мельник И. И. О многообразиях и решетках многообразий полугрупп // Исследования по алгебре. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1970. Вып. 2. С. 47–57.

Статья поступила 25.05.2001 г.