УДК 512.552

М. В. Волков, Г. В. Танана

МНОГООБРАЗИЯ ПРИСОЕДИНЕННО РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕЦ

В произвольном кольце* $\langle R, +, \cdot \rangle$ можно определить так называемое *присоединенное умножение* $\circ$ по правилу

$$a \circ b = a + b - ab$$

для любых $a, b \in R$. Легко проверяется, что присоединенное умножение ассоциативно, и, таким образом, кольцу $\langle R, +, \cdot \rangle$ сопоставляется его *присоединенная полугруппа* $\langle R, \circ \rangle$. Известно, что ряд важных свойств колец допускает изящную характеризацию в терминах присоединенной полугруппы: примером может служить тот классический факт, что кольцо будет радикальным тогда и только тогда, когда его присоединенная полугруппа является группой (см., например, [1, с.76–78]). Встречная идея выделять классы колец, накладывая те или иные условия на их присоединенные полугруппы, также представляется заслуживающей внимания. В рамках такого подхода Кларк [2] и Ду Ксиянкун [3] обстоятельно исследовали кольца, у которых присоединенные полугруппы являются объединением групп (такие кольца были названы в [2] *обобщенно радикальными*), а также кольца с некоторыми другими естественными ограничениями на присоединенные полугруппы.

Все типы присоединенных полугрупп, возникавших в [2] и [3], относились к классу регулярных полугрупп. Напомним, что полугруппа $\langle S, \cdot \rangle$ называется *регулярной*, если для любого $a \in S$ найдется такой элемент $b \in S$, что $aba = a$. Кольцо $\langle R, +, \cdot \rangle$ называется *регулярным*, если регулярна его мультипликативная полугруппа $\langle R, \cdot \rangle$. Назовем кольцо $\langle R, +, \cdot \rangle$ *присоединенно регулярным*, если регулярна его присоединенная полугруппа $\langle R, \circ \rangle$. Класс присоединенно регулярных колец весьма обширен. Действительно, поскольку каждая группа очевидно является регулярной полугруппой, присоединенно регулярными будут все радикальные и все обобщенно радикальные кольца. С другой стороны, присоединенно регулярным будет любое регулярное кольцо с единицей (см. лемму 1 ниже). Изучение присоединенно регулярных колец представляется поэтому достаточно содержательной задачей. В настоящей статье в качестве первого шага в этом направлении

*В данной статье слово “кольцо” означает ассоциативное кольцо, а слово “радикал” — радикал Джекобсона.

мы найдем характеризацию многообразий, состоящих из присоединенно регулярных колец, т.е., иначе говоря, выясним, выполнение каких тождеств гарантирует присоединенную регулярность.

Чтобы сформулировать основной результат статьи, потребуется одно обозначение. Для каждого простого числа p рассмотрим кольцо

$$S_p = \langle e, a \mid pe = 0,\ e^2 = e,\ ea = ae = a,\ a^2 = 0 \rangle.$$

Кольцо S_p состоит из p^2 элементов, коммутативно и имеет наглядную реализацию 2×2-матрицами над p-элементным полем $GF(p)$, а именно

$$S_p \cong \left\{ \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{array} \right) \middle| \ \alpha, \beta \in GF(p) \right\}.$$

Теорема. *Для многообразия $\mathfrak{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathfrak{V}$ состоит из присоединенно регулярных колец;*

(ii) *$\mathfrak{V}$ состоит из обобщенно радикальных колец;*

(iii) *$\mathfrak{V}$ не содержит ни одного из колец S_p, где p — простое число;*

(iv) *для некоторых $k > 1$ и m в $\mathfrak{V}$ выполняется тождество*

$$x^m (y - y^k) x^m = 0. \tag{1}$$

Доказательство теоремы проведем по схеме (i)⇒(iii)⇔(iv)⇒(ii)⇒(i).

(i)⇒(iii). Достаточно убедиться, что кольцо S_p ни при каком простом p не является присоединенно регулярным. Это легко вытекает из следующего хорошо известного (и непосредственно проверяемого) факта:

Лемма 1. *Если R — кольцо с единицей e, то отображение $a \mapsto e - a$ является изоморфизмом присоединенной полугруппы $\langle R, \circ \rangle$ на мультипликативную полугруппу $\langle R, \cdot \rangle$.*

Так как S_p — кольцо с единицей, остается заметить, что оно нерегулярно.

(iii)⇒(iv). Многообразия, не содержащие S_p, уже встречались в литературе. В частности, нам будет полезно такое их свойство [4, лемма 4]:

Лемма 2. *Если многообразие $\mathfrak{V}$ не содержит ни одного из колец S_p, где p — простое число, то полупростые кольца из $\mathfrak{V}$ удовлетворяют тождеству*

$$y = y^k \tag{2}$$

для некоторого $k > 1$, а аддитивный порядок любого ненулевого идемпотента в любом кольце из $\mathfrak{V}$ конечен и свободен от квадратов.

Поскольку кольцо S_p удовлетворяет тождествам

$$xy = yx, \ px = 0, \tag{3}$$

к многообразиям, не содержащим ни одного из колец S_p, применим и следующий результат, вытекающий из основной теоремы работы [5]:

Лемма 3. *Если многообразие $\mathfrak{V}$ не содержит ни одного из многообразий, задаваемых тождествами* (3), *где p — простое число, то $\mathfrak{V}$ удовлетворяет тождеству*

$$x^m = x^{2m} \tag{4}$$

для некоторого натурального m.

Рассмотрим теперь свободное в многообразии $\mathfrak{V}$ кольцо F с двумя свободными образующими x и y. В силу лемм 2 и 3 можно считать, что кольцо F удовлетворяет тождеству (4), а фактор-кольцо кольца F по его радикалу удовлетворяет тождеству (2). Если многообразие $\mathfrak{V}$ не удовлетворяет никакому тождеству вида (1), то, в частности, $x^m(y-y^k)x^m \neq 0$, где m и $k > 1$ — параметры упомянутых тождеств (4) и (2) соответственно. Обозначим элемент $x^m(y-y^k)x^m$ через c, а x^m через g. Тогда g — ненулевой идемпотент, c — элемент радикала и $gc = cg = c$. Ясно, что радикал кольца с тождеством (4) является ниль-идеалом, поэтому $c^t = 0$ для некоторого $t > 1$. Пусть t — минимальное число с таким свойством, тогда если положить $b = c^{t-1}$, то $b \neq 0$ и $b^2 = 0$. При этом, разумеется, $gb = bg = b$.

По лемме 2 аддитивный порядок n идемпотента g конечен и свободен от квадратов. Ясно, что аддитивный порядок ℓ элемента b будет неединичным делителем числа n. Обозначим через S подкольцо в F, порожденное g и b, и пусть p — некоторый простой делитель числа ℓ. Фактор-кольцо S/pS можно рассматривать как векторное пространство над p-элементным полем. Убедимся, что образы e и a элементов g и соответственно b в этом фактор-кольце линейно независимы. Действительно, допустим, что

$$\alpha e + \beta a = 0 \tag{5}$$

для некоторых $0 \leq \alpha, \beta < p$. Тогда $\alpha g + \beta b = ps$ для некоторого $s \in S$. В силу соотношений $g^2 = g$, $b^2 = 0$ и $gb = bg = b$ ясно, что каждый элемент в S представим в виде целочисленной комбинации элементов g и b; в частности, $s = \gamma g + \delta b$ для некоторых целых γ и δ. Итак,

$$\alpha g + \beta b = p(\gamma g + \delta b). \tag{6}$$

Умножив (6) на b, получим $\alpha b = p\gamma b$, откуда аддитивный порядок ℓ элемента b делит $p\gamma - \alpha$. Поскольку p делит ℓ, это возможно только при $\alpha = 0$.

Поэтому соотношение (6) сводится к

$$\beta b = p(\gamma g + \delta b). \tag{7}$$

Представим n — аддитивный порядок идемпотента g — в виде $n = pq$. Тогда число q взаимно просто с p, т.к. n свободен от квадратов. Умножив равенство (7) на q, получим в правой части $pq(\gamma g + \delta b) = \gamma ng + \delta nb = 0$. Поэтому и $q\beta b = 0$, откуда ℓ делит $q\beta$. Снова вспоминая, что p делит ℓ, заключаем, что это возможно только при $\beta = 0$. Итак, в любом соотношении вида (5) оба коэффициента α и β должны быть нулевыми, т.е. элементы e и a линейно независимы над $GF(p)$. Поэтому кольцо S/pS содержит в точности p^2 элементов, а т.к. его порождающие e и a по построению удовлетворяют всем определяющим соотношениям кольца S_p, кольцо S/pS изоморфно кольцу S_p. Отсюда кольцо S_p принадлежит многообразию $\mathfrak{V}$, что противоречит условию (iii).

(iv)$\Rightarrow$(iii). Чтобы убедиться, что ни одно из колец S_p не удовлетворяет тождеству (1) ни при каких $k > 1$ и m, достаточно подставить в (1) e вместо x и a вместо y. Тогда

$$x^m(y - y^k)x^m = e^m(a - a^k)e^m = eae = a \neq 0.$$

(iv)$\Rightarrow$(ii). Возьмем произвольное кольцо $R \in \mathfrak{V}$. Обозначим через I идеал, порожденный идемпотентами кольца R, через J — радикал R и положим $M = \{r \in R : \ IxI = 0\}$, $N = \{r \in R : \ exe = 0$ для любого $e^2 = e \in R\}$.

Лемма 4. $J = N = M$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $J \subseteq N$. Возьмем произвольный элемент $r \in J$. В силу уже доказанной равносильности условий (iv) и (iii) к многообразию $\mathfrak{V}$ применима лемма 3, откуда в кольце R выполняется некоторое тождество вида (4). Ясно, что радикал кольца с таким тождеством является ниль-идеалом, т.е. $r^\ell = 0$ для некоторого натурального ℓ. Заметим, что, подставляя y^k вместо y в тождество (1), можно вывести из (1) тождество $x^m(y - y^{k^2})x^m = 0$ и т.д. Другими словами, можно считать, что с самого начала параметр k в тождестве (1) больше, чем любое наперед заданное число, в частности, больше, чем ℓ. Тогда $r - r^k = r$. Возьмем теперь произвольный идемпотент $e \in R$ и подставим его в тождество (1) вместо x, одновременно заменив в (1) y на r. Мы получим

$$0 = x^m(y - y^k)x^m = e^m(r - r^k)e^m = ere,$$

откуда $r \in N$.

Теперь убедимся, что N — идеал в R. Ясно, что N — подгруппа. Возьмем произвольные элементы $z \in N$ и $r \in R$, и пусть e — произвольный идемпотент в R. Проверим, что $erze = 0$. Действительно,

$$erze = eerze = e(er - re)ze + ereze = e(er - re)ze,$$

т.к. $eze = 0$ по выбору z. Ввиду равносильности условий (iv) и (iii) к многообразию $\mathfrak{V}$ применима лемма 2, согласно которой в полупростом кольце R/J справедливо некоторое тождество вида (2). В силу классической теоремы Джекобсона (см., например, [6, теорема 3.1.2]), кольцо с таким тождеством коммутативно. Поэтому коммутатор $[e, r] = er - re$ принадлежит радикалу J, откуда и $[e, r]z \in J$. Выше мы уже доказали, что $J \subseteq N$, поэтому $[e, r]z \in M'$ и $e[e, r]ze = 0$. Таким образом, $erze = 0$ и N — левый идеал в R. Аналогично проверяется, что N — правый идеал.

Наш следующий шаг состоит в том, чтобы для произвольных идемпотентов $e, f \in R$ указать идемпотент g такой, что $ege = e$, $fgf = f$. Пусть $\bar{e}, \bar{f}$ — образы e и f в фактор-кольце R/J. Положим

$$\bar{g} = \bar{e} \circ \bar{f} = \bar{e} + \bar{f} - \bar{e}\bar{f}.$$

С учетом того что кольцо R/J коммутативно, непосредственно проверяется, что $\bar{g}$ — идемпотент и что $\bar{e}\bar{g} = \bar{e}$, $\bar{f}\bar{g} = \bar{f}$. Хорошо известно (см., например, [7, предложение 3.6.1]), что идемпотент можно поднять по модулю ниль-идеала, т.е. существует идемпотент $g \in R$, образ которого в R/J равен $\bar{g}$. Из того что $\bar{e}\bar{g} = \bar{e}$, следует, что $eg - e \in J$. Поскольку $J \subseteq N$, домножив элемент $eg - e$ слева и справа на e, получим $e(eg - e)e = 0$, откуда $ege = e$. Аналогично $fgf = f$.

У нас все готово к доказательству включения $N \subseteq M$. Возьмем произвольный элемент $r \in N$ и проверим, что $IrI = 0$, где, напомним, I — идеал, порожденный идемпотентами кольца R. Так как каждый элемент идеала I является суммой произведений вида aeb, где e — идемпотент, а a, b — произвольные элементы из R, достаточно проверить, что $aebrcfd = 0$ для любых $a, b, c, d \in R$ и любых идемпотентов e и f. Подберем такой идемпотент g, что $ege = e$, $fgf = f$; тогда

$$aebrcfd = aegebrcfgfd = aeg(ebrcf)gfd.$$

Выше мы доказали, что N — идеал в R, поэтому элемент в скобках принадлежит N. Но тогда по определению N имеем $g(ebrcf)g = 0$, откуда $aebrcfd = 0$ и $IrI = 0$, т.е. $r \in M$.

Остается проверить, что $M \subseteq J$. Возьмем произвольный элемент $r \in M$. В силу того что кольцо R удовлетворяет некоторому тождеству вида (4), некоторая степень r^ℓ элемента r будет идемпотентом. Но тогда по определению M имеем $r^\ell r r^\ell = 0$, откуда r — ниль-элемент. Поэтому M — ниль-идеал и $M \subseteq J$.

Приступим к доказательству того, что кольцо R обобщенно радикально. Согласно критерию Ду Ксиянкуна [3, теорема 5], достаточно проверить, что фактор-кольцо R/I радикально, а фактор-кольцо $I/I \cap M$ строго регулярно (напомним, что *строго регулярным* называется регулярное кольцо, идемпотенты которого лежат в центре). Первое условие выполняется в силу того уже отмечавшегося факта, что кольцо R удовлетворяет некоторому тождеству вида (4), а потому некоторая степень каждого его элемента будет идемпотентом и попадает в идеал I. Отсюда R/I — ниль-кольцо и, в частности, радикальное кольцо. Чтобы проверить второе условие, воспользуемся леммой 4, согласно которой $M = J$. Поэтому $I/I \cap M = I/I \cap J \cong I + J/J$ изоморфно подкольцу полупростого кольца R/J и по лемме 2 удовлетворяет некоторому тождеству вида (2). Ясно, что кольцо с таким тождеством регулярно, а в силу уже цитировавшейся теоремы Джекобсона оно к тому же коммутативно, а стало быть, строго регулярно.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что импликация (ii)⇒(i) очевидна.

Литература

1. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1995.

2. Clark W.E. Generalized radical rings // Canad. J. Math. 1968. V.20, №1. P.88–94.

3. Du Xiankun. The structure of generalized radical rings // Northeastern Math. J. 1988. V.4, №1. P.101–114.

4. Волков М.В, Силкин Н.Н. Ассоциативно амальгамируемые многообразия колец // Матем. заметки. 1995. Т.57, №2. С.203–213.

5. Волков М.В. Периодические многообразия ассоциативных колец // Изв. вузов. Математика. 1979. №8. С.1–13.

6. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.

7. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.

Статья поступила 13.03.1999 г.