УДК 517.518

С. В. Бердышев

КОНЕЧНОРАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ*

1. Пусть W_n есть пространство функций $f \in C = C(-\infty, \infty)$, у которых производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна на числовой оси $(-\infty, \infty)$, а производная $f^{(n)}$ порядка n принадлежит пространству $L_\infty = L_\infty(-\infty, \infty)$; в W_n выделим класс Q_n функций f со свойством $\|f^{(n)}\|_\infty \le 1$.

Известно решение задачи Стечкина [1] о наилучшем равномерном приближении оператора дифференцирования порядка k, $1 \le k \le n-1$, на классе функций Q_n линейными ограниченными операторами. Задача состоит в вычислении величины наилучшего приближения

$$E(N) = E(N, k, n) = \inf\{U(S) : \|S\|_{C \to C} \le N\}\ , \tag{1}$$

$$U(S) = \sup\{\|f^{(k)} - Sf\|_C : f \in Q_n\},$$

и экстремального оператора, на котором в (1) достигается нижняя грань.

Решение этой задачи было дано для $n = 2, 3$ С. Б. Стечкиным [1], для $n = 4, 5$ — В. В. Арестовым [2]. Для $n \ge 6$ значение величины (1) выписал В. В. Арестов [3] с помощью результата Домара [4]; окончательное решение задачи (1) при $n \ge 6$ получил А. П. Буслаев [5], в частности, он выписал явный вид экстремального оператора. При $n > 3$ экстремальный оператор является бесконечноразностным.

Цель настоящей работы состоит в построении и исследовании операторов максимально простой структуры, обладающих хорошими аппроксимативными свойствами в задаче Стечкина. Точнее, будут изучаться аппроксимативные свойства конечноразностных операторов с минимальным числом равномерно и «симметрично» расположенных узлов. В зависимости от того, является ли число k нечетным или четным, эти операторы берутся в виде

$$(Sf)(x) = \sum_{j=1}^{m} [A_j f(x + h_j) + A_{-j} f(x - h_j)], \tag{2}$$

$$h_j = (2j-1)h,\ 1 \le j \le m, \quad h > 0;$$

*Исследования выполнены при поддержке программы РФФИ «Ведущие научные школы», проект №00-15-96035.

$$(Sf)(x) = A_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} [A_j f(x+h_j) + A_{-j} f(x-h_j)], \tag{3}$$

$$h_j = jh, \ 1 \le j \le m, \quad h > 0.$$

Оператор S строится, исходя из условия, что на классе Q_n величина уклонения

$$U(S) = U(S, Q_n) = \sup\{\|f^{(k)} - Sf\|_C : \ f \in Q_n\} \tag{4}$$

конечна, а точнее, выбирается минимальное число m, при котором найдутся коэффициенты $\{A_j\}$, обеспечивающие условие конечности величины $U(S)$.

В дальнейшем наряду с W_n и Q_n мы будем рассматривать также другие, более широкие или более узкие в сравнении с W_n и Q_n, множества функций.

(a) Пусть $\mathcal{W}_n$ есть пространство функций f, определенных и $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых на числовой оси $(-\infty, \infty)$, у которых производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна на числовой оси $(-\infty, \infty)$, а производная $f^{(n)}$ порядка n принадлежит пространству $L_\infty = L_\infty(-\infty, \infty)$, и пусть $\mathcal{Q}_n$ есть класс функций $f \in \mathcal{W}_n$ со свойством $\|f^{(n)}\|_\infty \le 1$.

(b) В пространстве W_∞ бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси функций выделим класс $\widetilde{Q}_n$ функций, у которых производная порядка n ограничена по модулю единицей: $\widetilde{Q}_n = \{f \in W_\infty : \ \|f^{(n)}\|_C \le 1\}$.

Наряду с (4) введем величины

$$\widehat{U}(S) = \widehat{U}(S, \mathcal{Q}_n) = \sup\{\|f^{(k)} - Sf\|_C : \ f \in \mathcal{Q}_n\}. \tag{5}$$

$$\widetilde{U}(S) = \widetilde{U}(S, \widetilde{Q}_n) = \sup\{\|f^{(k)} - Sf\|_C : \ f \in \widetilde{Q}_n\}. \tag{6}$$

Операторы (2) и (3) инвариантны относительно (любого) сдвига, поэтому они однозначно определяются функционалами

$$sf = (Sf)(0); \tag{7}$$

а именно имеет место формула $(Sf)(x) = s(\tau_x f)$, где оператор сдвига τ_x задается соотношением $(\tau_x f)(t) = f(x+t)$. Положим

$$u(s) = u(s, Q_n) = \sup\{|f^{(k)}(0) - sf| : \ f \in Q_n\}, \tag{8}$$

$$\widehat{u}(s) = \widehat{u}(s, \mathcal{Q}_n) = \sup\{|f^{(k)}(0) - Sf| : \ f \in \mathcal{Q}_n\}, \tag{9}$$

$$\widetilde{u}(s) = \widetilde{u}(S, \widetilde{Q}_n) = \sup\{|f^{(k)}(0) - Sf| : \ f \in \widetilde{Q}_n\}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Для операторов* (2) *и* (3) *справедливы соотношения*

$$\|S\|_{C \to C} = \|s\|_{C^*}, \tag{11}$$

$$\widehat{U}(S) = U(S) = u(s) = \widehat{u}(s). \tag{12}$$

Доказательство. Утверждение (11) очевидно. Легко проверить также соотношения $U(S) = u(s) \le \widehat{U}(S) = \widehat{u}(s)$. Для доказательства (12) достаточно проверить неравенство $\widehat{u}(s) \le u(s)$. Пусть ϕ есть произвольная функция, определенная, бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси со свойствами: $\phi(t) = 1,\ |t| \le 1$; $\phi(t) = 0,\ |t| \ge 2$; $|\phi(t)| \le 1,\ t \in (-\infty, \infty)$. Для функции $f \in \mathcal{W}_n$ и числа $\theta > 0$ положим $f_\theta(t) = \phi(\theta t) f(t),\ t \in (-\infty, \infty)$. Очевидно, $f_\theta \in W_n$. При достаточно малом θ будем иметь

$$|f^{(k)}(0) - sf| = |f_\theta^{(k)}(0) - sf_\theta| \le u(s)\|f_\theta^{(n)}\|.$$

Нетрудно проверить (см., например, [6]), что $\|f_\theta^{(n)}\|_\infty \to \|f^{(n)}\|_\infty$ при $\theta \to +0$. Из двух последних соотношений следует неравенство

$$|f^{(k)}(0) - sf| \le u(s)\|f^{(n)}\|, \quad f \in \mathcal{W}_n,$$

а значит, и неравенство $\widehat{u}(s) \le u(s)$.

Лемма 2. *При любом $n \ge 1$ имеет место равенство*

$$\widetilde{U}(S) = U(S) = u(s) = \widetilde{u}(s). \tag{13}$$

Доказательство. Легко показать, что $\widetilde{U}(S) = \widetilde{u}(s) \le U(S) = u(s)$. Так что нам предстоит доказать обратное неравенство $u(s) \le \widetilde{u}(s)$. Предположим, что функция ϕ определена, неотрицательна, бесконечно дифференцируема на всей числовой оси, имеет компактный носитель (для определенности будем считать, что ее носитель сосредоточен на отрезке $[-1, 1]$) и нормирована условием $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \int_{-1}^{1} \phi(t)dt = 1$. При $\delta > 0$ положим $\phi^\delta(t) = \frac{1}{\delta}\phi(\frac{t}{\delta})$; носитель функции ϕ^δ сосредоточен на отрезке $[-\delta, \delta]$, и выполнено условие $\int \phi^\delta(t)dt = 1$. Для функции $f \in W_n$ рассмотрим свертку

$$f_\delta(t) = \int f(t+\theta)\phi^\delta(\theta)d\theta, \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{14}$$

функций f и ϕ^δ. Эта функция обладает следующими свойствами.

1) Функция f_δ бесконечно дифференцируема на всей числовой оси.

2) При любом $0 \le k \le n$ справедлива формула

$$f_\delta^{(k)}(t) = \int f^{(k)}(t+\theta)\phi^\delta(\theta)d\theta, \quad t \in (-\infty, \infty). \tag{15}$$

3) При любом $0 \le k \le n-1$ локально равномерно, т.е. равномерно на каждом отрезке, выполняется соотношение $f_\delta^{(k)} \to f^{(k)},\quad \delta \to +0$.

4) При любом $\delta > 0$ имеет место оценка $\|f_\delta^{(n)}\|_C \le \|f^{(n)}\|_\infty$.

Отсюда следует, что для любой функции $f \in W_n$ и любого $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$|f_\delta'(0) - s(f_\delta)| \le \widetilde{u}(s)\|f^{(n)}\|_\infty,$$

а это неравенство в пределе при $\delta \to +0$ дает такое соотношение:

$$|f'(0) - s(f)| \le \widetilde{u}(s)\|f^{(n)}\|_\infty, \quad f \in W_n.$$

Последнее неравенство влечет оценку $u(s) \le \widetilde{u}(s)$.

Лемма 3. *Для операторов* (2) *и* (3) *величина* (4) *конечна в том и только в том случае, если выполняются равенства*

$$(S\chi_\nu)(x) = \chi_\nu^{(k)}(x), \quad \chi_\nu(x) = x^\nu, \quad 0 \le \nu \le n-1. \tag{16}$$

Доказательство. Любой алгебраический многочлен p степени (не выше) $n-1$ обладает свойством $p^{(n)} \equiv 0$. Поэтому если $U(S) = \widetilde{U}(S) < \infty$, то (см. [1]) для многочлена p будет иметь место равенство $Sp = p^{(k)}$; в частности, выполняются условия (16).

Обратно, допустим, что выполняются условия (16). Представим функцию $f \in \mathcal{W}_n$ по формуле Тейлора $f(y) = p_{n-1}(y) + R_{n-1}(y)$ относительно точки $x \in (-\infty, \infty)$; в этой формуле

$$p_{n-1}(y) = p_{n-1}(y, f) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(y-x)^j$$

есть многочлен Тейлора порядка $n-1$, а

$$R_{n-1}(y) = R_{n-1}(y, f) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{y-x} f^{(n)}(t+x)(y-x-t)^{n-1}dt$$

— остаточный член в интегральной форме Коши. В силу условий (16) имеем $(Sp_{n-1})(x) = p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$. Поэтому выполняется равенство $(Sf)(x) - f^{(k)}(x) = (SR_{n-1})(x)$. Функция SR_{n-1} представляется в виде свертки некоторой кусочно полиномиальной функции σ, носитель которой сосредоточен на отрезке $[-h_m, h_m]$, и производной $f^{(n)}$ порядка n функции f. Таким образом, справедливо представление

$$(Sf)(x) - f^{(k)}(x) = (SR_{n-1})(x) = \int_{-h_m}^{h_m} \sigma(t) f^{(n)}(t+x)dt.$$

Отсюда следует такое соотношение:

$$U(S) = \widetilde{U}(S) = \int_{-h_m}^{h_m} |\sigma(t)|dt < \infty.$$

Убедимся, что в зависимости от того, будет ли число k нечетным или четным, в классе операторов (2), (3) можно ограничиться соответственно операторами вида

$$(Sf)(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j[f(x+h_j) - f(x-h_j)], \quad h_j = (2j-1)h, \ 1 \le j \le m, \quad h > 0; \tag{17}$$

$$(Sf)(x) = A_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} A_j[f(x+h_j) + f(x-h_j)], \quad h_j = jh, \ 1 \le j \le m, \quad h > 0. \tag{18}$$

Действительно, если число k нечетно, то по оператору (2) определим оператор $\overline{S}$ формулой

$$(\overline{S}f)(x) = s\left(f_x^{odd}\right), \quad f_x^{odd}(t) = \frac{1}{2}(f(x+t) - f(x-t));$$

а если число k четно, то по оператору (3) определим оператор $\overline{S}$ формулой

$$(\overline{S}f)(x) = s\left(f_x^{even}\right), \quad f_x^{even}(t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)).$$

Нетрудно проверить, что эти операторы будут иметь вид (17), (18) соответственно и будут обладать (не худшими в сравнении с S аппроксимативными) свойствами

$$\|\overline{S}\| \le \|S\|, \quad U(\overline{S}) \le U(S).$$

В дальнейшем будут изучаться именно операторы (17), (18).

Для построения операторов (17), (18) могут быть использованы следующие два подхода.

(a) Формула (17) содержит m, а формула (18) — $(m+1)$ коэффициентов $\{A_j\}$, которые предстоит выбрать. Условия (16) можно записать в эквивалентной форме:

$$s(x^\nu) = 0, \quad 0 \le \nu \le n-1, \ \nu \ne k; \quad s(x^k) = k!\,. \tag{19}$$

Эти соотношения дают n условий (линейных уравнений) на коэффициенты $\{A_j\}$. В силу конструкции операторов (17) и (18) для четных ν и соответственно для нечетных ν условия (19) выполняются автоматически. Оставшиеся условия в обоих случаях представляют собой системы линейных уравнений с определителем типа Вандермонда и имеют единственное решение для нечетных k при $n \in \{2m, 2m+1\}$ и для четных — при $n \in \{2m+1, 2m+2\}$.

(b) Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(k,m)$ есть множество узлов $\{h_j\}$ формул (17) и (18); в первом случае множество $\mathcal{H}$ состоит из $N = 2m$ точек, а во втором — из $N =$

$2m+1$ точек. По функции f, точке $x \in (-\infty, \infty)$ и множеству $\mathcal{H}$ построим полином Лагранжа $P(y) = P_{N-1}(y, x, f)$ порядка $N-1$, интерполирующий функцию $(\tau_x f)(y) = f(x+y)$ в точках множества $\mathcal{H}$. Этот полином будет иметь вид

$$P(y) = \sum l_j(y) f(x+h_j), \tag{20}$$

где $l_j = l_{j,\mathcal{H}}$ есть фундаментальные многочлены Лагранжа системы точек $\mathcal{H}$. Положим

$$(S^L f)(x) = P^{(k)}(0) = \sum l_j^{(k)}(0) f(x+h_j). \tag{21}$$

Покажем, что операторы (т.е. коэффициенты операторов), полученные этими двумя способами, совпадают. Действительно, во-первых, поскольку множество $\mathcal{H}$ узлов интерполирования симметрично относительно нуля, то фундаментальные многочлены Лагранжа симметричных точек h_j и $-h_j$ связаны соотношением $l_j(x) = l_{-j}(-x)$. Следовательно, оператор (21) имеет вид (17), (18). Во-вторых, оператор (21) по построению точен на полиномах степени не выше $n-1$, другими словами, он удовлетворяет условиям (19). Отсюда следует конечность величины $U(S^L)$ и, в силу единственности решения системы (19) линейных уравнений, — совпадение операторов.

2. В настоящей работе приводятся результаты, относящиеся к случаю $k=1$ при $n=2m$ и $n=2m+1$ для узлов $h_j = (2j-1)h,\ j = \overline{1,m},\ h>0$. Норму оператора (17) и величину уклонения этого оператора от оператора дифференцирования достаточно исследовать для шага $h=1$. Вначале вычислим норму оператора.

Теорема 1. *Для нормы оператора* (17) (*при* $h=1$) *имеет место формула*

$$\|S\| = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\Pi_\nu (2\nu+1)^2}\ , \tag{22}$$

в которой $\Pi_\nu = \frac{(2\nu)!!}{(2\nu+1)!!} = \frac{2^{2\nu}(\nu!)^2}{(2\nu+1)!}$, $\nu = 0, 1, \ldots,$ *и выполняется предельное соотношение*

$$\|S\| \to \frac{\pi}{2}\ , \quad m \to +\infty. \tag{23}$$

Доказательство. Учитывая (11), запишем интересующую нас величину

$$\|S\| = \|s\| = \sum_\nu |l'_\nu(0)|.$$

Преобразуем слагаемые $|l'_\nu(0)|$ последней суммы. Для фундаментальных многочленов интерполяционного процесса Лагранжа справедлива формула

$$l_\nu(x) = \prod_{j\neq\nu} \frac{(x-x_j)}{(x_\nu - x_j)}, \quad x_\nu = (-2m+1) + 2\nu \in \mathcal{H}(1,m), \quad \nu = \overline{0, 2m-1},$$

поэтому

$$l'_\nu(x) = \left(\prod_{j\neq\nu} \frac{(x-x_j)}{(x_\nu - x_j)}\right) \left[\frac{1}{x-x_0} + \ldots + \frac{1}{x-x_{2m-1}} - \frac{1}{x-x_\nu}\right].$$

Положим $t_0 = m - \frac{1}{2}$; эта точка выбрана из условия $0 = (-2m+1) + 2t_0$. Воспользовавшись этим обозначением и соотношением $x_\nu - x_j = 2(\nu - j)$, получаем

$$|l'_\nu(0)| = \left|\frac{2t_0 2(t_0-1)\ldots 2(t_0-(2m-1))}{2(t_0-\nu)}\right| \times$$

$$\times \left|\frac{1}{2(\nu-0)\ldots 2(\nu-(\nu-1))2(\nu-(\nu+1))\ldots 2(\nu-(2m-1))}\right| \times$$

$$\times \left|\frac{1}{2t_0} + \ldots + \frac{1}{2(t_0-(2m-1))} - \frac{1}{2(t_0-\nu)}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|t_0(t_0-1)\ldots(t_0-(2m-1))|}{|t_0-\nu|\nu!((2m-1)-\nu)!}\left|\frac{1}{t_0} + \ldots + \frac{1}{(t_0-(2m-1))} - \frac{1}{(t_0-\nu)}\right|.$$

Нетрудно увидеть, что

$$\frac{1}{t_0} + \ldots + \frac{1}{t_0-(2m-1)} = 0.$$

Используя это соотношение и выражение $t_0 = m - \frac{1}{2}$, получаем для нормы оператора соотношения

$$\|S\| = \|s\| = \sum_{\nu=0}^{2m-1} |l'_\nu(0)| = \frac{1}{2}\left[\sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{1}{\nu!(2m-1-\nu)!(m-\frac{1}{2}-\nu)^2}\right] \times$$

$$\times \left|\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(m-\frac{1}{2}-(2m-1)\right)\right| =$$

$$= \frac{((2m-1)!!)^2}{2^{2m+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{1}{\nu!(2m-1-\nu)!\left(m-\frac{1}{2}-\nu\right)^2} =$$

$$= \frac{((2m-1)!!)^2}{2^{2m-1}(2m-1)!} \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{C^\nu_{2m-1}}{(2m-1-2\nu)^2}.$$

Итак,

$$\|S\| = \frac{(2m-1)!!}{2^{2m-1}(2m-2)!!} \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{C^\nu_{2m-1}}{(2m-1-2\nu)^2}. \tag{24}$$

Последнюю сумму в (24) разобьем на две: $\sum_{\nu=0}^{2m-1} = \sum_{\nu=0}^{m-1} + \sum_{\nu=m}^{2m-1}$. Во второй сумме перейдем от индекса суммирования ν к индексу j по формуле $j = 2m-1-\nu$. В силу симметричности биномиальных коэффициентов получим

$$\sum_{\nu=m}^{2m-1} \frac{C_{2m-1}^{\nu}}{(2m-1-2\nu)^2} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{C_{2m-1}^{2m-1-j}}{(2m-1-2(2m-1-j))^2} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_{2m-1}^{\nu}}{(2m-1-2\nu)^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{C_{2m-1}^{\nu}}{(2m-1-2\nu)^2} = 2\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_{2m-1}^{\nu}}{(2m-1-2\nu)^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\|S\| = \frac{(2m-1)!!}{2^{2(m-1)}(2m-2)!!} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_{2m-1}^{\nu}}{(2m-1-2\nu)^2}. \tag{25}$$

Целью наших последующих выкладок будет изучение поведения суммы в этом выражении для нормы оператора. Обозначим через u_m сумму

$$u_m = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_{2m+1}^{\nu}}{(2m+1-2\nu)^2}. \tag{26}$$

Выразим u_{m+1} через u_m. С этой целью вначале запишем

$$u_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{m+1} \frac{C_{2m+3}^{\nu}}{(2m+3-2\nu)^2} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_{2m+3}^{\nu+1}}{(2m+1-2\nu)^2} + \frac{1}{(2m+3)^2}.$$

Следовательно,

$$u_{m+1} - u_m = \frac{1}{(2m+3)^2} + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_{2m+3}^{\nu+1} - C_{2m+1}^{\nu}}{(2m+1-2\nu)^2}.$$

Нетрудно проверить равенство

$$C_{2m+3}^{\nu+1} - C_{2m+1}^{\nu} = \left(\frac{6m+5}{8(m+1)} + \frac{(2m+1-2\nu)^2}{8(m+1)(2m+3)}\right) C_{2m+3}^{\nu+1},$$

которое дает представление

$$u_{m+1} - u_m = \frac{4^{m+1}}{8(m+1)(2m+3)} + \frac{6m+5}{8(m+1)} u_{m+1}.$$

Выражая отсюда u_{m+1} через u_m, мы имеем

$$u_{m+1} = \frac{8(m+1)}{2m+3} u_m + \frac{4^{m+1}}{(2m+3)^2}. \tag{27}$$

Теперь обозначим $\frac{u_m}{2^{2m}}$ через w_m (т.е. выберем w_m из условия $2^{2m} w_m = u_m$) и перепишем (27) в терминах w_m:

$$w_{m+1} = \frac{2(m+1)}{2m+3} w_m + \frac{1}{(2m+3)^2}. \tag{28}$$

Положим $\Pi_m = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$, $m \geq 0$. Исходя из (28) и значений $u_0 = w_0 = 1$, с помощью метода математической индукции убеждаемся, что имеет место формула

$$w_m = \Pi_m \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{\Pi_\nu (2\nu+1)^2}. \tag{29}$$

В силу формул (25) и (29) имеем

$$\|S\| = \frac{u_{m-1}}{2^{2(m-1)} \Pi_{m-1}} = \frac{w_{m-1}}{\Pi_{m-1}} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\Pi_\nu (2\nu+1)^2}.$$

Тем самым доказано первое утверждение теоремы. Имеет место формула

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\Pi_\nu (2\nu+1)^2} = \frac{\pi}{2}, \tag{30}$$

т.е. последний ряд сходится и его сумма есть $\pi/2$. Этот результат есть частный случай известной формулы Гаусса для суммы гипергеометрического ряда $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ при конкретных значениях параметров $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$ (см., например, [7, п.534, пример 13]). Отсюда следует второе утверждение теоремы. Теорема 1 полностью доказана.

3. Займемся теперь вычислением уклонения. Нас интересует величина (8)

$$u(s) = u_n(s) = \sup\{|f'(0) - sf| : \ f \in Q_n\}$$

для $n = 2m+1$ и $n = 2m$ при $h = 1$.

Теорема 2. *Для любого $m \geq 1$ при нечетном $n = 2m+1$ имеет место формула*

$$u_{2m+1}(s) = \frac{((2m-1)!!)^2}{(2m+1)!} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{1}{2m+1} = O\left(m^{-\frac{3}{2}}\right), \quad m \to +\infty, \tag{31}$$

и верхняя грань в (8) *достигается на функции* (*полиноме*)

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}. \tag{32}$$

Доказательство. Положим

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^{m}(x^2 - x_j^2).$$

Известно (см., например, [8, гл.II,§17(5), с.90]), что для любой $2m+1$ раз непрерывно дифференцируемой функции f и точки $x \in [h_{-m}, h_m]$ существуют точки $\zeta', \zeta'' \in [h_{-m}, h_m]$, лежащие между крайними узлами интерполирования, такие, что имеет место формула

$$f'(x) - P'(x) = \frac{f^{(2m)}(\zeta')}{(2m)!}\omega'(x) + \frac{f^{(2m+1)}(\zeta'')}{(2m+1)!}\omega(x). \tag{33}$$

Функция ω четная, и потому $\omega'(0) = 0$. А следовательно, справедлива формула

$$f'(0) - P'(0) = \frac{f^{(2m+1)}(\zeta'')}{(2m+1)!}\omega(0). \tag{34}$$

Отсюда, в силу леммы 2, следует, что

$$u_{2m+1}(s) = \widetilde{u}_{2m+1}(s) \le \frac{|\omega(0)|}{(2m+1)!}.$$

На функции (32) правая часть (34) равна $\frac{\omega(0)}{(2m+1)!}$. Таким образом,

$$u_{2m+1}(s) = \widetilde{u}_{2m+1}(s) = \frac{|\omega(0)|}{(2m+1)!} = \frac{1}{(2m+1)!}\prod_{j=1}^{m} x_j^2 = \frac{((2m-1)!!)^2}{(2m+1)!}.$$

Это дает первое утверждение в (31). Последнее утверждение из (31) нетрудно получить с помощью формул Валлиса или Стирлинга (см., например, [7, п.607]). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для любого* $m \ge 1$ *при четном* $n = 2m$ *имеют место соотношения*

$$\underline{u}(m) \le u_{2m}(s) \le \overline{u}(m), \tag{35}$$

в которых

$$\overline{u}(m) = \frac{((2m-1)!!)^2}{(2m)!\ (2m-1)} = O\left(m^{-\frac{3}{2}}\right)\ , \quad m \to +\infty. \tag{36}$$

$$\underline{u}(m) = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{1}{4m^2-1} = O\left(m^{-\frac{5}{2}}\right)\ , \quad m \to +\infty. \tag{37}$$

Доказательство. Предположим вначале, что функция $f \in W_n$ нечетная. В этом случае интерполяционный полином $P(x) = P(x, f) = P_{2m-1}(x, f)$ также будет нечетным. Следовательно, $f(0) = P(0) = 0$. Таким образом, полином P интерполирует функцию f уже в $2m$ узлах $\{0,\ (2m-1),\ \pm(2j-1)j, 1 \leq j \leq m-1\}$. По этим узлам строим функцию

$$\Omega^+(x) = x(x - (2m-1)) \prod_{j=1}^{m-1} (x^2 - (2j-1)^2).$$

Согласно формуле Коши для остаточного члена интерполяционного процесса Лагранжа (см., например, [8, гл.II, §3(1)]), справедливо неравенство

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(2m)}\|_\infty}{(2m)!} |\Omega^+(x)|. \tag{38}$$

Поделим неравенство (38) на $|x|$ и в полученном неравенстве перейдем к пределу при $x \to 0$. В результате получим оценку

$$|f'(0) - P'(0)| \leq \frac{\|f^{(2m)}\|_\infty}{(2m)!\ (2m-1)} \prod_{j=1}^{m} (2j-1)^2. \tag{39}$$

Пусть теперь f есть произвольная (необязательно нечетная) функция из W_n. Запишем неравенство (39) для функции $f^{odd}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. В результате получим неравенство (39) уже для любой функции $f \in W_n$. Тем самым обоснована оценка сверху в (35).

Получим оценку снизу величины $u_{2m}(s)$. Для этого выберем конкретную функцию $\underline{f} \in Q_{2m}$. А именно, пусть $\underline{f}$ есть функция класса W_{2m+1} со следующими свойствами:

$$\underline{f}^{(2m+1)}(x) = \frac{1}{2m-1}, \quad x \in [-(2m-1), 2m-1],$$

$$\underline{f}^{(2m+1)}(x) = 0, \quad x \notin [-(2m-1), 2m-1];$$

$$\underline{f}^{(j)}(0) = 0, \quad 0 \leq j \leq 2m.$$

Нетрудно убедиться, что $\underline{f} \in Q_{2m}$ и

$$\underline{f}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!\ (2m-1)}, \quad x \in [-(2m-1), 2m-1].$$

В силу предыдущей теоремы

$$|\underline{f}'(0) - s(\underline{f})| = \frac{u_{2m+1}(s)}{2m-1}.$$

Можно считать, что теорема 3 доказана.

4. В предыдущих двух пунктах мы изучали оператор (17) при $h = 1$. Будем обозначать этот оператор символами S и S_1, а оператор (17) при $h > 0$ символом S_h. Если оператор S записать в виде

$$(Sf)(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j[f(x + (2j - 1)) - f(x - (2j - 1))], \tag{40}$$

то, например, с помощью леммы 3 нетрудно убедиться, что оператор S_h будет иметь вид

$$(S_h f)(x) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{m} A_j[f(x + h_j) - f(x - h_j)], \quad h_j = (2j - 1)h, \ 1 \le j \le m, \quad h > 0. \tag{41}$$

Последнюю формулу можно интерпретировать следующим образом:

$$(S_h f)(x) = \frac{1}{h}(Sf_h)\left(xh^{-1}\right), \quad f_h(x) = f(hx), \ f \in C. \tag{42}$$

Из (41) и (42) легко вывести (см. [1]) такие соотношения:

$$\|S_h\| = \frac{1}{h}\|S\|, \quad U(S_h) = h^{n-1}U(S). \tag{43}$$

Эти два соотношения позволяют перенести результаты теорем 1–3 на оператор S_h при любом $h > 0$.

5. Сравним аппроксимативные свойства операторов (17) и наилучшего (экстремального) оператора задачи (1). Известна (см. [3, 9, 5]) формула, связывающая величину $E(N) = E(N, k, n)$ с константой $K = K(k, n)$ в соответствующем неравенстве Колмогорова [10]. При $k = 1$ эта формула имеет вид

$$E(N) = E(N, 1, n) = \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} K(1, n)^n N^{-(n-1)}.$$

При $N > 0$ выберем параметр $h = h(N) > 0$ так, чтобы $\|S_h\| = N$. Отношение $U(S_{h(N)})/E(N)$ можно считать характеристикой аппроксимативных свойств операторов (17). Из формул (43) следует, что

$$h(N) = \frac{N}{\|S\|}, \quad U(S_{h(N)}) = U(S)\|S\|^{n-1}N^{-(n-1)}.$$

Поэтому

$$\frac{U(S_{h(N)})}{E(N)} = n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \|S\|^{n-1} \frac{U(S)}{K(1, n)^n} = \frac{U(S)}{E(\|S\|)} \ . \tag{44}$$

Таким образом, величина (44) не зависит от N, а зависит лишь от параметра n. Введем обозначение

$$\sigma_n = \frac{U(S_{h(N)})}{E(N)} = \frac{U(S)}{E(\|S\|)} \ .$$

Ясно, что всегда $\sigma_n \geq 1$.

При $n = 2$ и $n = 3$ (т.е. $m = 1$) оператор S_h имеет вид

$$(S_h f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

и, как показал С. Б. Стечкин [1], является экстремальным в задаче (1). Поэтому

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 1.$$

Рассмотрим еще величину σ_n для $n = 4$ и $n = 5$; в этом случае $m = 2$. Положим $K_n^1 = K(1,n)^n$; в работе [10] приведены следующие значения:

$$K_4^1 = \frac{512}{375}, \quad K_5^1 = \frac{1953125}{1572864}.$$

Отсюда с помощью теорем 1–3 убеждаемся, что

$$\sigma_4 \leq \frac{42875}{31104} = 1.37844... \ , \quad \sigma_5 = \frac{38416}{28125} = 1.36590... \ .$$

Величины $U(S)$ и $E(\|S\|)$ имеют разное поведение по n при $n \to \infty$. А именно, в силу теорем 2 и 3 величина $U(S)$ имеет степенной порядок стремления к нулю при $n \to \infty$. Выясним теперь поведение величины

$$E(\|S\|) = E(\|S\|, 1, n) = \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} (K(1,n))^n \|S\|^{-(n-1)}.$$

Из обсуждения поведения константы $K(k,n)$, проведенного в [10], следует, что

$$\lim_{n \to \infty} K(1,n)^n = \frac{4}{\pi}.$$

Изучим теперь величину $\|S\|^{n-1}$; для этого воспользуемся соотношениями (22), (23) и (30). С помощью формулы Стирлинга (см., например, [7, п. 406]) убеждаемся, что

$$\Pi_\nu = \frac{(2\nu)!!}{(2\nu+1)!!} = \frac{2^{2\nu}(\nu!)^2}{(2\nu+1)!} \sim \frac{\sqrt{\pi\nu}}{2\nu+1} \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Поэтому члены ряда (30) ведут себя по ν при $\nu \to \infty$ как $\nu^{-\frac{3}{2}}$, а потому разность $\frac{\pi}{2} - \|S\|$, являющаяся остатком ряда (30), — как $m^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом,

$$\|S\| = \frac{\pi}{2}(1 - \xi(n)), \quad \xi(n) = O(n^{-\frac{1}{2}}),\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\|S\|^{n-1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+O(\sqrt{n})}$. Объединяя полученные результаты, окончательно получаем соотношение

$$\sigma_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+\varepsilon_n},\ \varepsilon_n = O(\sqrt{n}), \quad n \to \infty;$$

таким образом, величина σ_n довольно быстро растет по n.

Автор благодарен В. В. Арестову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т.1, №2. С.137–148.
2. Арестов В. В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования // Мат. заметки. 1967. Т.1, №2. С.149–154.
3. Арестов В. В. О наилучшем приближении операторов дифференцирования в равномерной метрике: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1969.
4. Domar Y. An extremal problem related to Kolmogoroff's type inequality for bounded functions // Arc. Mat. 1968. Vol.7. P.433–441.
5. Буслаев А. П. О приближении оператора дифференцирования // Мат. заметки. 1981. Т.25, №5. С.731–742.
6. Арестов В. В. О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования // Мат. заметки. 1969. Т.5, №3. С.273–284.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1966. Т.2.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
9. Габушин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. 1970. Т.8, №5. С.551–562.
10. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. М.: Наука, 1985. С.252–263.

Статья поступила 24.07.2000 г.