УДК 512.532.2

М. В. Волков

ПОЛУМОДУЛЯРНЫЕ И ДЕЗАРГОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП: ТОЖДЕСТВА*

Данная работа является второй в цикле из трех статей, посвященных описанию многообразий полугрупп с полумодулярной (вверх или вниз) решеткой подмногообразий и многообразий полугрупп с дезарговой решеткой подмногообразий. Она непосредственно продолжает первую статью цикла [1], в §1 которой читатель найдет все необходимые определения и формулировки основных теорем 1–3.

Во всех трех статьях цикла принята сквозная нумерация параграфов. В данную работу входят §§3 и 4.

3. Структурное описание: необходимость

В этом параграфе доказывается импликация д) $\longrightarrow$ г) теоремы 3, а также устанавливается, что слабо полумодулярное вверх многообразие должно удовлетворять одному из условий структурного варианта теоремы 1.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые обозначения. Как и в [1], F — абсолютно свободная полугруппа над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, элементы которого мы называем *буквами*, в то время как элементы F — *словами*. Символ $\equiv$ обозначает равенство в F. Если $u \in F$, то $\ell(u)$ — длина слова u, $\ell_x(u)$ — число вхождений буквы x в слово u, а $c(u)$ — множество всех букв, входящих в запись u. Если $k \leqslant \ell(u)$, то через $h^k(u)$ мы обозначаем префикс длины k слова u. Вместо $h^1(u)$ будем писать просто $h(u)$. Если $u, v \in F$, то будем писать $u \lhd v$, если $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторого эндоморфизма ξ полугруппы F и некоторых $a, b \in F^1$, где через F^1 обозначена полугруппа F с внешне присоединенной единицей (пустым словом). Многообразие полугрупп называется *локально нильпотентным*, если каждая его конечно порожденная полугруппа нильпотентна. Очевидно, что всякое локально нильпотентное многообразие состоит из нильполугрупп. Пусть m и n — натуральные числа такие, что $m \leqslant n$, а $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп. Мы обозначаем через $F_{n,m}$ множество всех слов длины n, зависящих в точности от букв $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а через $\mathrm{Id}_{n,m}(\mathcal{V})$ — множество всех выполненных в $\mathcal{V}$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №01-01-00258) и межвузовской научной программы «Университеты России — фундаменталвные исследования» Министерства образования Российской Федерации (проект № 617).

тождеств вида $u = v$, где $u, v \in F_{n,m}(\mathcal{V})$. Мы будем говорить, что слова u и v *подобны* и писать $u \approx v$, если v может быть получено из u переименованием переменных. Слово u называется *изотермом в многообразии* $\mathcal{V}$, если $\mathcal{V}$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству вида $u = v$. Через $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ мы обозначаем множество всех перестановок $\sigma \in \mathbf{S}_n$ таких, что в многообразии $\mathcal{V}$ выполнено тождество $x_1x_2\cdots x_n = x_{1\sigma}x_{2\sigma}\cdots x_{n\sigma}$. Ясно, что $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ — подгруппа в $\mathbf{S}_n$.

Предложение 3.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ не содержит многообразий, указанных в пп.* J1)–J3) *индикаторного варианта теоремы* 1, *то $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо одному из условий* M1)–M3) *структурного варианта теоремы* 1, *либо одному из следующих условий:*

M4') $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, *где $\mathcal{A}$ — многообразие периодических абелевых групп, $\mathcal{K}$ — одно из многообразий $\mathcal{C}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$;*

M5') $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, *где $\mathcal{F}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{N}$ — многообразие нильполугрупп.*

Доказательство. Напомним, что многообразие полугрупп называется *многообразием индекса* $\leqslant 2$, если все его нильполугруппы нильпотентны ступени 2. В работе [2] показано, что если многообразие $\mathcal{V}$ не содержит многообразий, указанных в пп. J2) и J3) индикаторного варианта теоремы 1, то оно либо имеет индекс $\leqslant 2$, либо удовлетворяет одному из условий M4') и M5') предложения 3.1. Таким образом, мы можем считать, что $\mathcal{V}$ — многообразие индекса $\leqslant 2$. По условию $\mathcal{V}$ не содержит многообразий, указанных в п. J1) индикаторного варианта теоремы 1. Как показано в [3], отсюда вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств $(m1)$–$(m3)$ для некоторого натурального n. Ясно, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $(m1)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию M1) структурного варианта теоремы 1.

Предположим, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе $(m2)$. В силу леммы 14 работы [3] $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{ZM}$, а $\mathcal{E}$ — вполне регулярное многообразие. Если $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $(m1)$, а значит и условию M1). Следовательно, мы можем считать, что $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Далее, пусть $S \in \mathcal{E}$ и e, f, g — идемпотенты из S. Используя $(m2)$, имеем

$$(ef)^2 = e \cdot fef = e \cdot ef^2 = ef \quad \text{и} \quad efg = efg^2 = feg^2 = feg = fe^2g = efeg.$$

Таким образом, множество всех идемпотентов из S образует подполугруппу в S, удовлетворяющую тождеству $xyz = xyxz$. Мы показали, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию M2) структурного варианта теоремы 1. Аналогично проверяется, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств $(m3)$, то оно удовлетворяет условию M3). ∎

В дальнейшем мы будем часто использовать следующие три технических замечания о тождествах многообразий нильполугрупп. Первое из этих замечаний очевидно, второе вытекает из леммы 1 работы [4]. Третье замечание, безусловно, хорошо известно; в явном виде оно, по-видимому впервые, доказано в [5] (см. там лемму 1.3).

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие нильполугрупп.*

а) *Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.*

б) *Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида $x_1x_2 \cdots x_n = v$, то либо это тождество — перестановочное, либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2 \cdots x_n = 0$.*

в) *Если $\mathcal{N}$ локально нильпотентно и удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \lhd v$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.*

Нам не известно, верно ли утверждение в) этой леммы для произвольного многообразия нильполугрупп. Однако в дальнейшем у нас будет возникать потребность в его применении только для перестановочных многообразий нильполугрупп, а всякое такое многообразие, как хорошо известно, локально нильпотентно.

Предложение 3.2. *Если многообразие нильполугрупп $\mathcal{N}$ не содержит многообразий, заданных системами тождеств $(j11)$–$(j16)$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида*

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi} \tag{1}$$

для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — многообразие полугрупп, заданное одной из систем тождеств $(j11)$–$(j16)$. Ясно, что тождество $u = 0$ выполнено в $\mathcal{F}$, если $\ell(u) \geqslant 5$ или $\ell_x(u) \geqslant 2$ для некоторой буквы x. Отсюда легко вытекает, что если $x_1x_2x_3x_4$ — изотерм для некоторого многообразия $\mathcal{X}$, то $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$. По условию, $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{N}$. Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетоворяет нетривиальному тождеству вида $x_1x_2x_3x_4 = v$. Ясно, что это тождество не выполняется в многообразии $\mathcal{J} = \mathrm{var}\{x^2 = xyx = 0\}$, и потому $\mathcal{N} \nsupseteq \mathcal{J}$. В силу предложения 2 работы [4] отсюда вытекает, что $\mathcal{N}$ перестановочно. Из леммы 1б) вытекает, что тождество $x_1x_2x_3x_4 = v$ либо влечет в $\mathcal{N}$ тождество $x_1x_2x_3x_4 = 0$, либо имеет вид (1) для некоторой перестановки $\pi \in \mathbf{S}_4$. В первом случае $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (1) для всякой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Рассмотрим второй случай. Ясно, что в этом случае группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{N})$ нетривиальна. Следовательно, либо $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{N}) = \mathrm{gr}\{\sigma\}$ для некоторой транспозиции $\sigma \in \mathbf{S}_4$, либо $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{N})$ содержит некоторую четную перестановку из $\mathbf{S}_4$. В первом случае $\mathcal{N}$ содержит одно из многообразий $\mathrm{var}(j11)$, ..., $\mathrm{var}(j16)$, что невозможно. Остается заметить, что во втором случае группа $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{N})$ содержит некоторую перестановку $\pi \in \Pi_1$.

В дальнейшем мы часто будем использовать следующую лемму, в которой указаны два частных случая результатов работы [6].

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, удовлетворяющее тождеству вида* (1) *для некоторой перестановки π.*

а) *Если $\pi = (13)(24)$, то в $\mathcal{V}$ выполнено также тождество вида*

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = x_{1\pi}x_{2\sigma}x_{3\sigma}x_{4\sigma}x_{5\sigma} \tag{2}$$

для произвольной перестановки $\sigma \in \mathbf{A}_5$.

б) *Если $\pi = (14)(23)$, то в $\mathcal{V}$ выполнено также тождество вида* (2) *для произвольной перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_5$.*

Нам неоднократно понадобится также следующая

Лемма 3. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству* (1) *при $\pi = (13)(24)$ и не содержит многообразия* $\mathrm{var}(j17)$, *то оно удовлетворяет либо одному из тождеств*

$$xyxz = yxzx, \tag{3}$$

$$xyxz = yxyz, \tag{4}$$

$$yxzx = yzxz, \tag{5}$$

либо тождеству одного из следующих видов:

$$xyxz = w, \tag{6}$$

$$yxzx = w, \tag{7}$$

где $\ell(w) = 4$ и $x^2y \lhd w$.

Доказательство. Легко видеть, что если $u \neq 0$ в многообразии $\mathrm{var}(j17)$, то u подобно некоторому слову из множества

$$W = \{x, xy, xyz, xyx, xyzt, xyxz, yxzx\}.$$

Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида $u = v$ такому, что $u \in W$ и $u = v$ не вытекает из тождества (1) при $\pi = (13)(24)$. Отсюда легко вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству, которое не вытекает из тождества (1) при $\pi = (13)(24)$ и имеет либо вид (6), либо вид (7). В силу симметрии мы можем рассмотреть только первое из этих двух тождеств. Ясно, что тождество $xyxz = 0$ влечет (4). Убедимся в том, что это обстоятельство вкупе с леммой 1 позволяет рассматривать только тождество вида (6), в котором $c(w) = \{x, y, z\}$ и $\ell(w) = 4$. В самом деле, если $\ell(w) = 3$ то, очевидно, $w \lhd xyxz$. Предположим теперь, что $\ell(w) > 4$. В силу леммы 2а) достаточно убедиться в том, что используя (2) с подходящим σ, мы можем привести произвольное слово w такое, что $\ell(w) \geqslant 5$ и $n(w) = 3$, к слову w_1 такому, что $xyxz \lhd w_1$. Положим $w' \equiv h^{\ell(w)-1}(w)$. Поскольку $\ell(w') \geqslant 4$, некоторая буква входит в запись w' как минимум дважды. Обозначим эту букву через x. Итак, $w' \equiv a_1 x a_2 x a_3$ для некоторых $a_1, a_2, a_3 \in F^1$ таких, что $x \notin c(a_1)$ и $x \notin c(a_3)$. Если слово a_2 непусто, то $xyx \lhd w'$, и потому $xyxz \lhd w$. Пусть теперь a_2 пусто. Тогда w' подобно одному из слов x^2yz, yx^2z, yzx^2 и x^2y^2. Применяя к w тождество вида (2), в котором $\sigma = (234)$ (при $w' \equiv x^2yz$), $\sigma = (134)$ (при $w' \equiv yx^2z$), $\sigma = (124)$ (при $w' \equiv yzx^2$) и $\sigma = (123)$ (при $w' \equiv x^2y^2$), мы получим слово w_1 такое, что $xyxz \lhd w_1$.

Итак, пусть $c(w) = \{x, y, z\}$ и $\ell(w) = 4$. Остается проверить, что $x^2y \lhd w$. Предположим, что это не так. Тогда w либо подобно одному из слов $xyzx$, xyz^2, либо совпадает с одним из слов

$$xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, zxzy, zyzx, yxzx, zxyx, xyzy, zyxy, xzyz, yzxz.$$

Каждое из слов $xyzx$ и xyz^2 по модулю тождества (1) при $\pi = (13)(24)$ равно слову u такому, что $x^2y \lhd u$. Если $w \in \{xyxz, xzxy\}$, то тождество $xyxz = w$ следует из тождества (1) с $\pi = (13)(24)$. Наконец, если $w \in \{yxyz, yzyx, zxzy, zyzx\}$ (соответственно $w \in \{yxzx, zxyx, xyzy, zyxy, xzyz, yzxz\}$), то тождество $xyxz = w$ по модулю (1) с $\pi = (13)(24)$ эквивалентно тождеству (4) (соответственно (3)).

Предложение 3.3. *Если многообразие нильполугрупп $\mathcal{N}$ не содержит многообразий, заданных системами тождеств $(j1)$–$(j6)$ и $(j8)$–$(j17)$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$x^2y = xyx = yx^2; \tag{8}$$

$$x^2y = xyx = xy^2; \tag{9}$$

$$x^2y = xyx,\ xy^2 = yx^2; \tag{10}$$
$$x^2y = yxy = yx^2; \tag{11}$$
$$x^2y = yx^2,\ xyx = yxy; \tag{12}$$
$$x^2y = yxy = xy^2; \tag{13}$$
$$x^2y = xy^2,\ xyx = yxy; \tag{14}$$
$$x^2y = yxy,\ xy^2 = yx^2; \tag{15}$$
$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = yxy; \tag{16}$$
$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = xyx; \tag{17}$$
$$x^2y = y^2x,\ xyx = yxy; \tag{18}$$
$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2; \tag{19}$$
$$xy^2 = yx^2,\ xyx = yxy. \tag{20}$$

Доказательство. Легко понять, что заключение предложения эквивалентно следующему утверждению: $\mathcal{N}$ удовлетворяет двум нетривиальным и неэквивалентным друг другу тождествам $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$, где $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$. В самом деле, непосредственная проверка показывает, что если $u, v \in F_{3,2}$ и тождество $u = v$ нетривиально, то оно эквивалентно одному из следующих девяти тождеств:

$$x^2y = xyx,\ x^2y = yx^2,\ x^2y = xy^2,\ x^2y = yxy,\ x^2y = y^2x,$$
$$xy^2 = yxy,\ x^2y = xyx,\ xyx = yxy,\ xy^2 = yx^2.$$

Существует 36 пар таких тождеств, но легко понять, что каждая из этих пар влечет одну из систем (8)–(20).

Приступим к доказательству существования указанной пары тождеств. Прежде всего, можно отметить, что в силу предложения 3.2 $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$.

Далее, заметим, что если каждое из слов x^2y и yx^2 являются изотермами для $\mathcal{N}$, то $\mathrm{var}(j7) \subseteq \mathcal{N}$. В силу симметрии мы можем считать, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида $x^2y = w$. Из леммы 1 вытекает, что это тождество либо влечет $x^2y = 0$, либо совпадает с одним из следующих тождеств:

$$x^2y = xyx, \tag{21}$$
$$x^2y = yx^2, \tag{22}$$
$$x^2y = xy^2, \tag{23}$$
$$x^2y = yxy, \tag{24}$$
$$x^2y = y^2x, \tag{25}$$

$$x^2y = xyx^2, \tag{26}$$
$$x^2y = yxy^2, \tag{27}$$
$$x^2y = (xy)^2, \tag{28}$$
$$x^2y = (yx)^2. \tag{29}$$

Поскольку $x^2y = 0$ влечет тождество (25), мы получаем, что в любом случае $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (21)–(29). Дальнейшие рассуждения распадаются на шесть случаев.

Случай 1. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству* (21). По условию $\mathcal{N} \not\supseteq \mathrm{var}(j10)$. Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, не выполняющемуся в $\mathrm{var}(j10)$. Это тождество не может быть эквивалентно тождеству (21), поскольку (21) выполняется в $\mathrm{var}(j10)$. Если $u, v \in F_{3,2}(\mathcal{N})$, то все доказано. В противном случае, используя лемму 1, легко проверить, что $u = v$ либо влечет одно из тождеств $x^2y = 0$, $xyx = 0$, $xy^2 = 0$, либо совпадает с одним из тождеств (26)–(29) или с одним из следующих тождеств:

$$yx^2 = x^2yx, \tag{30}$$
$$yx^2 = y^2xy, \tag{31}$$
$$yx^2 = (xy)^2, \tag{32}$$
$$yx^2 = (yx)^2, \tag{33}$$
$$xyx = x^2y^2, \tag{34}$$
$$xyx = y^2x^2. \tag{35}$$

Если $u = v$ — одно из тождеств (26)–(29) или (30)–(35), то, используя (21), можно преобразовать v к слову w такому, что $u \lhd w$. В силу леммы 1 $u = 0$ в $\mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств $x^2y = 0$, $xyx = 0$, $xy^2 = 0$, а потому и одному из тождеств $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$, $yx^2 = xy^2$.

Случай 2. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству* (22). По условию $\mathcal{N} \not\supseteq \mathrm{var}(j9)$. Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, не выполняющемуся в $\mathrm{var}(j9)$. Это тождество не может быть эквивалентно (22), поскольку (22) выполняется в $\mathrm{var}(j9)$. Как и выше, все ясно, если либо $u, v \in F_{3,2}(\mathcal{N})$, либо $u = v$ влечет одно из тождеств $x^2y = 0$, $xyx = 0$, $xy^2 = 0$. Покажем, что все возможности ведут к одной из этих двух ситуаций.

Как и в случае 1, нам надо проверить десять «подозрительных» тождеств (26)–(29) и (30)–(35). Для шести из них, а именно, для (26), (27), (30), (31), (34) и (35), используя (22) можно преобразовать правую часть тождества и получить слово w такое, что левая часть тождества делит w. Следовательно, в этих случаях мы можем применить лемму 1 и получить ситуацию, указанную в предыдущем абзаце. Тождества (32) и (33) по модулю

(22) эквивалентны тождествам (28) и (29) соответственно. Осталось рассмотреть тождества (28) и (29). Они двойственны друг другу. Хотя мы уже зафиксировали «направление» в начале доказательства предложения, мы можем использовать здесь соображения симметрии, поскольку тождество (22) двойственно к себе. Итак, мы можем ограничиться только рассмотрением тождества (28). Напомним, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Если π — цикл длины 3, то, применяя это тождество к $(xy)^2$, мы получим слово w такое, что $x^2y \lhd w$. По лемме 1, мы имеем $x^2y = 0$. Если $\pi = (12)(34)$ или $\pi = (14)(23)$, то (1) влечет $(xy)^2 = (yx)^2$. Последнее тождество вместе с (28) дает (25). Пусть, наконец, $\pi = (13)(24)$. В силу леммы 3 $\mathcal{N}$ удовлетворяет либо одному из тождеств (3), (4), (5), либо тождеству одного из типов (6) и (7), где $\ell(w) = 4$ и $x^2y \lhd w$. Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (3), то, полагая в этом тождестве $x = y$, мы получим тождество $(xy)^2 = (yx)^2$, которое, как уже отмечалось выше, вместе с (28) дает (25). Полагая $x = y$ в каждом из тождеств (4), (5), (6) и (7), мы получаем тождество вида $(xy)^2 = w'$, где $\ell(w') = 4$ и $x^2y \lhd w'$. Это тождество вместе с (28) дает $x^2y = w'$, а в силу леммы 1 и $x^2y = 0$.

Мы весьма подробно рассмотрели два типичных случая, и потому позволим себе в дальнейшем быть более лаконичными.

Случай 3. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству* (23). Здесь достаточно использовать тот факт, что $\mathcal{N} \not\supseteq \mathrm{var}(j4)$, и повторить рассмотрения, проведенные в случае 2 (заметим, что тождество (23), как и (22), двойственно к себе).

Случай 4. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству* (24). А в этом случае достаточно использовать тот факт, что $\mathcal{N} \not\supseteq \mathrm{var}(j5)$, и повторить рассмотрения, проведенные в случае 1.

Случай 5. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству* (25). Здесь мы будем опираться на тот факт, что $\mathcal{N} \not\supseteq \mathrm{var}(j1)$. Поскольку тождества (26)–(29) выполнены в $\mathrm{var}(j1)$, мы имеем только шесть «подозрительных» тождеств, а именно (30)–(35). Используя тождество (25) и лемму 1, легко проверить, что каждое из тождеств (30), (31), (34) и (35) влечет одно из тождеств $xy^2 = 0$ и $xyx = 0$. То же верно и для тождеств (32) и (33) в предположении, что перестановка π из тождества вида (1), выполненного в $\mathcal{N}$, есть цикл длины 3. Если π — одна из перестановок (12)(34) и (14)(23), то $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $(xy)^2 = (yx)^2$, которое вместе с каждым из тождеств (32) и (33) влечет $yx^2 = xy^2$. Наконец, если $\pi = (13)(24)$, то, в силу утверждения, двойственного к лемме 3, $\mathcal{N}$ удовлетворяет либо одному из тождеств (3), (4), (5), либо тождеству одного из видов (6) и (7), где $\ell(w) = 4$ и $yx^2 \lhd w$. Тождество (3) влечет $(xy)^2 = (yx)^2$. Как уже отмечалось выше, последнее тождество влечет $yx^2 = xy^2$. Каждое из тождеств (4), (5), (6) и (7) приводит к тождеству вида $(xy)^2 = w'$, где $\ell(w') = 4$ и $yx^2 \lhd w'$. Последнее тождество вместе с тождеством (32) (соответственно (33)) влечет $yx^2 = w'$ (соответственно, $xy^2 = w'$). В силу леммы 1 это означает, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $xy^2 = 0$.

Случай 6. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет одному из тождеств* (26)–(29). Как и в случае 5, мы будем использовать тот факт, что $\mathcal{N} \not\supseteq \mathrm{var}(j1)$. С учетом леммы 1, легко проверить, что тождество, не выполненное в $\mathrm{var}(j1)$, либо влечет одно из тождеств $xyx = 0$ и $xy^2 = 0$, либо совпадает с одним из тождеств (21)–(24), (30)–(35) или с одним из следующих тождеств:

$$yx^2 = xyx, \tag{36}$$

$$yx^2 = yxy, \tag{37}$$

$$yx^2 = xy^2, \tag{38}$$

$$xyx = yxy. \tag{39}$$

Поскольку тождества $xyx = 0$ и $xy^2 = 0$ влекут (39) и (38) соответственно, мы можем полагать, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (21)–(24), (30)–(35), (36)–(39). Если в $\mathcal{N}$ выполнено одно из тождеств (21)–(24), то мы получаем ситуацию, рассмотренную в случаях 1–4. Тождества (36), (37) и (38) двойственны к тождествам (21), (24) и (25) соответственно. Таким образом, при выполнении в $\mathcal{N}$ одного из тождеств (36), (37) и (38) мы можем использовать соображения, двойственнные к изложенным выше при рассмотрении случаев 1, 4 и 5 (использование симметрии здесь корректно, поскольку условие доказываемого предложения симметрично). Предположим теперь, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (39). Тогда

$$xyx^2 \equiv xyx \cdot x = yxy \cdot x \equiv y \cdot xyx = y \cdot yxy \equiv y^2xy.$$

В силу леммы 1 (26) и (39) влекут $x^2y = 0$. Аналогично проверяется, что последнее тождество вытекает из совокупности (39) и любого из тождеств (27)–(29). Но $x^2y = 0$ влечет (25), и мы приходим к ситуации, рассмотренной в случае 5.

Осталось рассмотреть тождества (30)–(35). Каждое из тождеств (34) и (35) позволяет привести правую часть каждого из тождеств (26)–(29) к слову w такому, что $\ell(w) = 5$ и $x^2y \lhd w$. Лемма 1 показывает, что $\mathcal{N}$ удовлеворяет $x^2y = 0$. То же верно, если $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (26), (27) и одному из тождеств (30)–(33). Во всех этих случаях $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (25), и мы вновь попадаем в ситуацию рассмотренную в случае 5. Симметрично, сочетание одного из тождеств (30), (31) и одного из тождеств (26)–(29) влечет $xy^2 = 0$. В этом случае $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (38), которое было рассмотрено в предыдущем абзаце. Каждая из пар тождеств

(28), (32) и (29), (33) влечет (22), что приводит нас к ситуации, рассмотренной в случае 2. Остается рассмотреть две пары тождеств: (28), (33) и (29), (32). Напомним, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Как и выше, все ясно, если π — цикл длины 3. Если $\pi \in \{(12)(34), (14)(23)\}$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $(xy)^2 = (yx)^2$. Это тождество вместе с каждой из пар тождеств (28), (33) и (29), (32) влечет (22), и мы приходим к ситуации, рассмотренной в случае 2. Наконец, случай, когда $\pi = (13)(24)$, благодаря лемме 3 может быть рассмотрен аналогично предыдущему случаю.

Предложение 3.4. *Если многообразие нильполугрупп $\mathcal{N}$ не содержит многообразия* $\mathrm{var}(j22)$ *и* $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ *эквивалентно системе тождеств* (8), *то $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из следующих тождеств:*

$$x^3yz = xy^3z, \tag{40}$$
$$x^3yz = xy^2z^2, \tag{41}$$
$$x^2y^2z = xy^2z^2. \tag{42}$$

Доказательство. Ясно, что система тождеств (8) влечет произвольное не перестановочное уравновешенное тождество. В частности, многообразие $\mathcal{N}$ локально нильпотентно и мы можем применять лемму 1в). Если $u \neq 0$ в $\mathrm{var}(j22)$, то u подобно некоторому слову из множества

$$W = \{x, xy, x^2, xyz, x^2y, x^3, xyzt, x^2yz, x^2y^2, x^3y,$$
$$x_1x_2x_3x_4x_5, x^2yzt, x^2y^2z, x^3yz\}.$$

Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида $u = v$, где $u \in W$. Ясно, что $u = 0$ влечет одно из тождеств (40)–(42). В силу леммы 1 мы можем считать, что $c(u) = c(v)$ и если $\ell(u) \neq \ell(v)$, то слова u и v неприменимы друг к другу. Следовательно, $u = v$ — либо одно из тождеств (40)–(42), либо одно из следующих тождеств:

$$x^2y = xy^2, \tag{43}$$
$$x^2yz = xy^2z, \tag{44}$$
$$x^2y^2 = x^3y, \tag{45}$$
$$x^3y = xy^3, \tag{46}$$
$$x^2yzt = xy^2zt, \tag{47}$$
$$x^2y^2z = x^3yz, \tag{48}$$
$$x^2y^2z^2 = x^3yz. \tag{49}$$

Ясно, что тождество (46) влечет (40), тождество (45) влечет (41), а каждое из тождеств (43), (44) и (47) влечет (42). Остается рассмотреть тождества (48) и (49). Используя подстановки $x \longrightarrow y$, $y \longrightarrow x$ и тот факт, что в $\mathcal{N}$ выполнены все не перестановочные уравновешенные тождества, мы получаем, что каждое из этих тождеств влечет (40).

Предложение 3.5. *Если многообразие нильполугрупп* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству* (1) *при* $\pi = (14)(23)$, $\mathcal{N}$ *не содержит многообразия* $\mathrm{var}(j21)$ *и* $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ *эквивалентно системе тождеств* (12), *то* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет одному из следующих тождеств:*

$$x^2yz = y^2zx, \tag{50}$$

$$x^2yz = yzyx, \tag{51}$$

$$xyxz = yzyx. \tag{52}$$

Доказательство. Если $u \neq 0$ в $\mathcal{N}$, то u подобно некоторому слову из множества

$$W = \{x, xy, xyz, x^2y, xyx, x^3, xyzt, x^2yz, xyxz\}.$$

Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида $u = v$ такому, что $u \in W$ и $u = v$ не выполнено в $\mathrm{var}(j21)$. Отсюда легко вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет либо тождеству вида (6), либо тождеству вида

$$x^2yz = w. \tag{53}$$

Заметим, что тождество $xyxz = 0$ влечет (5), а тождество $x^2yz = 0$ влечет (3). С учетом леммы 1, это позволяет ограничить наши рассмотрения только тождествами видов (6) и (53), в которых $c(w) = \{x, y, z\}$ и $\ell(w) = 4$. Действительно, если $\ell(w) = 3$, то $w \lhd xyxz$ и $w \lhd x^2yz$. Если же $\ell(w) \geqslant 5$, то, согласно лемме 2b), мы можем преобразовать слово w как к слову w' такому, что $xyxz \lhd w'$, так и к слову w'' такому, что $x^2yz \lhd w''$.

Итак, пусть $c(w) = \{x, y, z\}$ и $\ell(w) = 4$. Ясно, что w подобно одному из слов $xyxz$ и x^2yz. Предположим сначала, что $w \approx x^2yz$. Используя тождества $x^2y = yx^2$ и (1) при $\pi = (14)(23)$ (выполненные в $\mathcal{N}$), мы получаем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам $x^2yz = yzx^2 = x^2zy$. Отсюда легко вытекает, что тождество вида (53) эквивалентно в $\mathcal{N}$ тождеству (3), а тождество вида (6) — одному из тождеств (4) и $x^2yz = xyxz$. Ясно, что во втором случае $xyxz = x^2yz = x^2zy = xzxy$ в $\mathcal{N}$, т.е. в $\mathcal{N}$ выполнено тождество вида (6), в котором $w \approx xyxz$.

Осталось рассмотреть случай, когда $w \approx xyxz$. Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (53) то, как отмечалось в предыдущем абзаце, в $\mathcal{N}$ выполнено одно из тождеств (4) и $xyxz = xzxy$. Таким образом, мы можем считать, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество вида (6). Легко видеть, что в этом случае $\mathcal{N}$ удовлетворяет либо тождеству (5), либо тождеству $xyxz = xzxy$. В последнем случае $xyxz = xzxy = zxzy = zyzx = yzyx$ в $\mathcal{N}$. Таким образом, в этом случае $\mathcal{N}$ также удовлетворяет тождеству (5).

Предложение 3.6. *Если многообразие нильполугрупп $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству* (1) *при* $\pi = (13)(24)$, $\mathcal{N}$ *не содержит многообразия* $\mathrm{var}(j17)$ *и* $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ *эквивалентно системе тождеств* (19), *то* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет одному из тождеств* (3)–(5).

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству одного из видов $xyxz = w$ или $yxzx = w$, где $\ell(w) = 4$ и $x^2y \lhd w$. Ясно, что слово w подобно одному из слов x^2yz и yx^2z. Используя последовательно тождества $x^2y = y^2x$ и $xy^2 = yx^2$ (которые по условию выполнены в $\mathcal{N}$), имеем

$$yx^2z = xy^2z = xz^2y = zx^2y = zy^2x = yz^2x.$$

Те же два тождества вкупе с тождеством вида (1) при $\pi = (13)(24)$ позволяют построить аналогичную цепочку равенств, начинающуюся со слова x^2yz:

$$\begin{gathered} x^2yz = yzx^2 = yxz^2 = z^2yx = y^2zx = zxy^2 = \\ = zyx^2 = x^2zy = z^2xy = xyz^2 = xzy^2 = y^2xz. \end{gathered}$$

Итак, по модулю тождеств (19) и (1) при $\pi = (13)(24)$ слово w инвариантно относительно любой перестановки на множестве $\{x, y, z\}$, и потому тем же свойством обладает одно из слов $xyxz$ и $yxzx$. Следовательно, в $\mathcal{N}$ выполнено одно из тождеств (50) и (52).

Предложение 3.7. *Если многообразие нильполугрупп $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству* (1) *при* $\pi = (14)(23)$, $\mathcal{N}$ *не содержит многообразий, заданных системами тождеств* $(j18)$–$(j20)$, *и* $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ *эквивалентно системе тождеств* (19), *то* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет либо тождеству* (52), *либо одному из следующих тождеств:*

$$xyxz = xyzx, \tag{54}$$

$$xyxz = yxzy, \tag{55}$$

$$xyxz = zxyz, \tag{56}$$

$$xyzx = yxzy. \tag{57}$$

Доказательство. Если $u \neq 0$ в $\mathcal{N}$, то u подобно некоторому слову из множества
$$W = \{x, xy, xyz, xyx, xyzt, xyxz, xyzx\}.$$

Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида $u = v$ такому, что $u \in W$ и $u = v$ не следует из тождества (1) при $\pi = (14)(23)$. Отсюда легко вытекает, что в $\mathcal{N}$ выполнено либо тождество вида (6), либо тождество вида

$$xyzx = w. \tag{58}$$

Заметим, что тождество $xyxz = 0$ влечет (5), а тождество $xyzx = 0$ влечет (57). С учетом леммы 1 это позволяет ограничить наши рассмотрения только тождествами видов (6) и (58), в которых $c(w) = \{x, y, z\}$ и $\ell(w) = 4$. Действительно, если $\ell(w) = 3$, то $w \lhd xyxz$ и $w \lhd xyzx$. Если же $\ell(w) \geqslant 5$, то, согласно лемме 2b), мы можем преобразовать w как к слову w' такому, что $xyxz \lhd w'$, так и к слову w'' такому, что $xyzx \lhd w''$.

Итак, пусть $c(w) = \{x, y, z\}$ и $\ell(w) = 4$. Предположим сначала, что $x^2 \lhd w$. Поскольку $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (1) при $\pi = (14)(23)$, мы можем полагать, что w подобно одному из слов yx^2z и x^2yz. Пусть $w \approx yx^2z$. Из доказательства предложения 3.6 вытекает, что в этом случае слово w инвариантно по модулю (19) относительно любой перестановки на множестве $\{x, y, z\}$, и потому тем же свойством обладает одно из слов $xyxz$ or $xyzx$. Это означает, что в $\mathcal{N}$ выполнено одно из тождеств (5) и (57). Пусть теперь $w \approx x^2yz$. По условию $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^2y = y^2x$. Подставляя в это тождество yz вместе y, мы получаем тождество $x^2yz = (yz)^2x$. Правая часть этого тождества может быть преобразована к слову w такому, что $x^2yz \lhd w$ (напомним, что в силу леммы 2б) $\mathcal{N}$ удовлетворяет любому тождеству вида (2)). В силу леммы 1б) $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^2yz = 0$. Следовательно, тождества (6) и (58) влекут $xyxz = 0$ и $xyzx = 0$ соответственно. Как отмечено выше, отсюда вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (5) и (57).

Теперь мы можем считать, что правая часть каждого из тождеств видов (6) и (58), выполненных в $\mathcal{N}$, свободна от квадратов. Принимая во внимание тождество (1) при $\pi = (14)(23)$, мы получаем, что эта правая часть подобна одному из слов $xyzx$ и $xyxz$. Предположим сначала, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству одного из видов (6) и (58), в котором $w \approx xyzx$. Если это тождество имеет вид (6), то оно эквивалентно одному из тождеств (54)–(56). Если же рассматриваемое тождество имеет вид (58), то, с учетом тождества (1) при $\pi = (14)(23)$, оно эквивалентно тождеству (57). Осталось рассмотреть случай когда правая часть всякого тождества одного из видов (6) и (58), выполненного в $\mathcal{N}$, подобна слову $xyxz$. В частности, это означает, что всякое такое тождество имеет вид (6). Если среди указаннвх праввх частей появляется хотя бы одно из слов $yzyx$ и $zxzy$, то мвı имеем тождество (5) (для слова $yzyx$ это очевидно, а чтобвı убедиться в этом для слова $zxzy$ надо применить тождество $xyxz = zxzy$ само к себе). Если же все эти правые части принадлежат множеству $\{xyxz, xzxy, yxyz, zyzx\}$, то возможны лишь следующие три нетривиальиых тождества: $xyxz = xzxy$, $xyxz = yxyz$ и $xyxz = zyzx$. Поскольку эти тождества ввıполнены в многообразиях $\mathrm{var}(j18)$, $\mathrm{var}(j19)$ и $\mathrm{var}(j20)$ соответственно, $\mathcal{N}$ должно удовлетворять по крайней мере двум из этих трех тождеств. Но любая пара из этих тождеств эквивалентна тождеству (5).

Теперь мы уже в состоянии доказать импликацию д) $\longrightarrow$ г) теоремы 3. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, удовлетворяющее условию д) теоремы 3. В силу предложений 3.1 и 3.2 либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий M1)–M4) стуктурного варианта теоремы 1, либо $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{N}$ — многообразие нильполугрупп, удовлетворяющее тождеству вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Осталось показать, что в последнем случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств ($m5$)–($m15$), ($m20$)–($m23$) и ($\ell1$)–($\ell11$). Хорошо известно, что тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$. Отсюда сразу вытекает, что $\mathcal{SL}$ удовлетворяет системам тождеств ($m5$)–($m47$) и ($\ell1$)–($\ell11$). Поэтому достаточно доказать, что одна из систем ($m5$)–($m15$), ($m20$)–($m23$) и ($\ell1$)–($\ell11$) выполнена в многообразии $\mathcal{N}$. Напомним, что по условию $\mathcal{N}$ не содержит многообразий, заданных системами тождеств ($j1$)–($j6$) и ($j8$)–($j22$).

В силу предложения 3.3 $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (8)–(20). Ясно, что каждая из систем (10), (11), (14)–(18) и (20) вместе с тождеством (1) дает одну из систем ($m8$)–($m13$), ($\ell1$) и ($\ell2$).

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (8), (9), (12), (13) и (19).

Если в $\mathcal{N}$ выполнена система (8) то, по предложению 3.4, $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (40)–(42). Тождества (41) и (42) приводят к системам ($m6$) и ($m7$) соответственно. Предположим теперь, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет (40). Подставляя в это тождество y^2 вместо y, мы получаем $x^3y^2z = xy^6z$. Поскольку $\mathcal{N}$ — перестановочное многообразие нильполугрупп, лемма 1в) показывает, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $x^6 = 0$, а значит и $x^6 = x^7$. Мы получили систему тождеств ($m5$).

Предположим теперь, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (9) и (13). Каждая из этих систем содержит тождество $x^2y = xy^2$. Подставляя в него x^2 вместо x, мы получаем $x^4y = x^2y^2$. Применяя лемму 1в), получаем, что $x^4 = 0$, а значит и $x^4y = yx^4$ в $\mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств $(m14)$ и $(m15)$.

Пусть теперь $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (12). Напомним, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Если $\pi \in \Pi_2$, то мы получаем систему тождеств $(m20)$, а если $\pi = (14)(23)$, то в силу предложения 3.5 мвы приходим к одной из систем $(m21)$–$(m23)$.

Пусть, наконец, в $\mathcal{N}$ ввыполнена система тождеств (19). Как и выше, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Если $\pi \in \Pi_3$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств $(\ell 3)$; если $\pi = (13)(24)$, то в силу предложения 3.6 мвы получаем одну из систем $(\ell 4)$–$(\ell 6)$; наконец, если $\pi = (14)(23)$, то, как видно из предложения 3.7, $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем $(\ell 7)$–$(\ell 11)$.

Итак, мы вывели импликацию д) $\longrightarrow$ г) теоремы 3 из предложений 3.1–3.7. Для того, чтобвы доказать, что всякое слабо полумодулярное вверх многообразие удовлетворяет одному из условий структурного варианта теоремы 1, понадобятся еще два предложения.

Предложение 3.8. *Если многообразие нильполугрупп* $\mathcal{N}$ *не содержит многообразий, заданных системами тождеств* $(j7)$, $(j11)$–$(j16)$, *и* $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ *эквивалентно системе тождеств* (18), *то* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет одному из следующих тождеств:*

$$x^2y = 0, \tag{59}$$
$$xyx = 0. \tag{60}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу предложения 3.2 $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$.

Заметим, что система тождеств (18) выполнена в многообразии $\mathrm{var}(j7)$. Следовательно, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, которое не выполняется в $\mathrm{var}(j7)$. Поскольку все слова длины > 3 и слово x^3 равны 0 в $\mathrm{var}(j7)$, мы можем полагать, что u — одно из слов

$$x, x^2, xy, xyz, xyx, x^2y, xy^2.$$

Как обычно, если $u \in \{x, x^2\}$, то лемма 1 влечет, что $x^2 = 0$ в $\mathcal{N}$. Следовательно, в этом случае $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^2y = 0$, и все доказано. Далее, если $u \in \{xy, xyz\}$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет либо тождеству $xyz = 0$, либо некоторому перестановочному тождеству длины 3. В первом случае вновь все доказано. Во втором случае, приравнивая две буквы, мы можем получить одно из тождеств $xyx = x^2y$, $xyx = yx^2$ и $x^2y = y^2x$. Но $\mathcal{N}$ не удовлетворяет ни одному из этих тождеств, поскольку $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ совпадает с (18).

Пусть теперь $u \in \{xyx, x^2y, xy^2\}$. Дальнейшие рассмотрения распадаются на три случая.

Случай 1. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* $x^2y = v$, *которое не выполнено в* $\mathrm{var}(j7)$. В силу леммы 1 это тождество либо влечет тождество $x^2y = 0$ (и в этом случае все доказано), либо совпадает с одним из тождеств (21)–(24) и (26)–(29). Тождества (21)–(24) не выполнены в $\mathcal{N}$ в силу ограничения на $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$. Далее, по условию $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (18). Легко проверить, что тождества (26)–(29) попарно эквивалентны по модулю (19). Поэтому можно считать, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам $x^2y = xyx^2 = (xy)^2$. Используя выполненное в $\mathcal{N}$ тождество вида (1), мы можем преобразовать слово $(xy)^2$ (если π — цикл длины 3) или слово xyx^2 (если π — другая перестановка из Π_1) к слову w такому, что $x^2y \lhd w$. В силу леммы 1б) $x^2y = 0$ в $\mathcal{N}$.

Случай 2. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* $xy^2 = v$, *которое не выполнено в* $\mathrm{var}(j7)$. Тогда из ограничений на $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ вытекает, что $v \notin F_{3,2}$. По той же причине $xy^2 \neq 0$ in $\mathcal{N}$. В силу леммы 1 остается рассмотреть тождества (30)–(33). По модулю (18) они попарно эквивалентны. Таким образом, мы можем считать, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам $yx^2 = x^2yx = (xy)^2$. Рассмотрения, аналогичные проведенным в случае 1, показывают, что $xy^2 = 0$, и потому $xy^2 = yx^2$ в $\mathcal{N}$. Но это невозможно.

Случай 3. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* $xyx = v$, *которое не выполнено в* $\mathrm{var}(j7)$. Как и выше, $v \notin F_{3,2}$, поскольку в противном случае можно получить тождество, которое либо не выполнено в $\mathcal{N}$, либо выполнено в $\mathrm{var}(j7)$. Тогда в силу леммы 1 мы получим либо тождество $xyx = 0$, либо одно из тождеств (34) и (35). Если $xyx = 0$ в $\mathcal{N}$, то все доказано. Пусть теперь $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (34) и (35), т.е. $v \approx x^2y^2$. Но используя тождество $x^2y = y^2x$ мы можем привести слово x^2y^2 к слову y^2xy. Поскольку $xyx \lhd y^2xy$, мы можем применить лемму 1б) и получить, что $xyx = 0$ в $\mathcal{N}$.

Предложение 3.9. *Если многообразие нильполугрупп* $\mathcal{N}$ *не содержит многообразий, заданных системами тождеств* $(j7)$, $(j11)$–$(j20)$, *и* $\mathrm{Id}_{3,2}(\mathcal{N})$ *эквивалентно системе тождеств* (19), *то* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет либо тождеству* (59), *либо одному из следующих тождеств:*

$$xy^2 = 0, \tag{61}$$
$$x^2y = (xy)^2, \tag{62}$$
$$yx^2 = (yx)^2, \tag{63}$$

причем тождества (62), (63) *могут выполняться в* $\mathcal{N}$ *только в случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

а) $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* (1) *при* $\pi = (12)(34)$;

б) $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* (1) *при* $\pi = (13)(24)$ *и тождеству* (3) *и не удовлетворяет ни одному из тождеств* (4), (5);

в) $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* (1) *при* $\pi = (14)(23)$ *и тождеству* (57) *и не удовлетворяет ни одному из тождеств* (52), (54)–(56).

Доказательство. Как и выше, в силу предложения 3.2 $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$.

Далее, поскольку система тождеств (19) выполнена в многообразии $\mathrm{var}(j7)$, многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, не выполненному в $\mathrm{var}(j7)$. Как и в доказательстве предложения 3.8, это означает, что u — одно из слов

$$x, x^2, xy, xyz, xyx, x^2y, xy^2.$$

Случай, когда $u \in \{x, x^2, xy, xyz\}$ разбирается точно также, как в предложении 3.8. Пусть теперь $u \in \{xyx, x^2y, xy^2\}$. Дальнейшие рассмотрения распадаются на три случая.

Случай 1. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* $x^2y = v$, *которое не выполнено в* $\mathrm{var}(j7)$. Как и в доказательстве предложения 3.8, мы можем считать, что это тождество совпадает с одним из тождеств (26)–(29). Далее, по условию $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (19). Заметим, что если $\pi = (13)(24)$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (50)–(52) (по предложению 3.6), а если $\pi = (14)(23)$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (5), (54)–(57) (по предложению 3.7).

Далее, в этом случае каждое из тождеств (26) и (27) вместе с тождеством $xy^2 = yx^2$ влечет, в силу леммы 1б), тождество $x^2y = 0$. То же тождество может быть выведено из каждого из тождеств (28) и (29) (которые эквивалентны по модулю $x^2y = y^2x$) в каждом из следующих случаев:

перестановка π из тождества вида (1), выполненного в $\mathcal{N}$, есть цикл длины 3;

$\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (51) и (52);

$\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (5), (54)–(56).

Все оставшиеся случаи приводят к одной из исключительных ситуаций, указанных в формулировке доказываемого предложения.

Случай 2. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* $xy^2 = v$, *которое не выполнено в* $\mathrm{var}(j7)$. Поскольку условие доказываемого предложения симметрично, этот случай двойствен к предыдущему.

Случай 3. $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождеству вида* $xyx = v$, *которое не выполнено в* $\mathrm{var}(j7)$. Как и в доказательстве предложения 3.8, мы можем рассматривать только тождества $xyx = 0$, (34) и (35). Случай, когда $xyx = 0$ в $\mathcal{N}$, невозможен. Пусть теперь $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств (34) и (35), т.е. $v \approx x^2y^2$. Используя тождество $x^2y = y^2x$, мы можем преобразовать слово x^2y^2 к слову y^2xy. Поскольку $xyx \lhd y^2xy$, мы можем применить лемму 1б) и получить, что $xyx = 0$ в $\mathcal{N}$.

Покажем теперь, как из как из предложений 3.1–3.9 вытекает, что произвольное слабо полумодулярное вверх многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий структурного варианта теоремы 1. Из результатов §2 следует, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию д) теоремы 3. Как показано выше, из этого вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо одному из условий M1)–M4) структурного варианта теоремы 1, либо условию L5) теоремы 3. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{N}$ — многообразие нильполугрупп, удовлетворяющее одной из систем тождеств ($\ell1$)–($\ell11$). Требуется доказать, что в этом случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из систем тождеств ($m16$)–($m19$) и ($m24$)–($m47$). Поскольку, как уже отмечалось выше, каждая из этих систем тождеств выполнена в $\mathcal{SL}$, достаточно проверить, что одна из них выполнена в $\mathcal{N}$. Из результатов §2 следует, что $\mathcal{N}$ не содержит многообразий, заданных системами тождеств ($j1$)–($j22$).

Предложение 3.8 показывает, что если $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств ($\ell1$), то в $\mathcal{N}$ выполнена одна из систем тождеств ($m16$) и ($m18$). А из утверждения, двойственного к предложению 3.8, вытекает, что система тождеств ($\ell2$) влечет в $\mathcal{N}$ одну из систем ($m17$) и ($m19$).

Предположим теперь, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств ($\ell3$). Если $\pi \neq (12)(34)$ то в силу предложения 3.9 $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем ($m24$) и ($m25$); если же $\pi = (12)(34)$, то в силу того же предложения $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем ($m24$), ($m25$), ($m42$) и ($m43$).

Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств ($\ell5$)–($\ell7$) и ($\ell9$)–($\ell11$), то по предложению 3.9 оно удовлетворяет одной из систем ($m27$), ($m28$), ($m30$)–($m32$), ($m34$)–($m37$) и ($m39$)–($m41$).

Наконец, если $\mathcal{N}$ либо удовлетворяет ($\ell4$), но не удовлетворяет ни ($\ell5$), ни ($\ell6$), либо удовлетворяет ($\ell8$), но не удовлетворяет ни одной из систем ($\ell7$), ($\ell9$)–($\ell11$), то, применяя предложение 3.9, мы получаем одну из систем ($m26$), ($m29$), ($m33$), ($m38$) и ($m44$)–($m47$).

Таким образом, мы вывели требуемое заключение из предложений 3.1–3.9. Одновременно мы завершили доказательство необходимости в структурном варианте теоремы 1.

4. Эквациональное описание: необходимость

В этом параграфе доказывается импликация г) $\longrightarrow$ в) теоремы 3, а также проверяется, что в слабо полумодулярном вверх многообразии выполняется одна из систем тождеств эквационального варианта теоремы 1.

Очевидно, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию M1) структурного варианта теоремы 1, то оно удовлетворяет тождеству $(m1)$ для некоторого натурального n. Предположим теперь, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию M2) структурного варианта теоремы 1. Иными словами, $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{E}$ — вполне регулярное многообразие такое, что множество всех идемпотентов произвольной полугруппы $S \in \mathcal{E}$ образует подполугруппу в S, удовлетворяющую тождеству $xyz = xyxz$. Поскольку многообразие $\mathcal{E}$ вполне регулярно, оно удовлетворяет тождеству $x = x^{n+1}$ для некоторого n. Очевидно, что $xy = x^{n+1}y$ и $(xy)^{n+1} = xy^{n+1}$ в $\mathcal{E}$. Пусть теперь $S \in \mathcal{E}$ и E_S — множество всех идемпотентов в S. По условию E_S — полугруппа, удовлетворяющая тождеству $xyz = xyxz$. Ясно, что $s^n \in E_S$ для всякого $s \in S$. Следовательно, S удовлетворяет тождеству $x^n y^n z^n = x^n y^n x^n z^n$. Если $n = 1$, то это тождество принимает вид $xyz = xyx^n z$. Следовательно, в указанном случае $\mathcal{E}$ удовлетворяет системе тождеств $(m2)$. Пусть теперь $n > 1$. Тогда в S выполняется следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} xyz &= (xy)^{n+1}z = (xy)^{n+1}z^{n+1} = xyxy(xy)^{n-1}z^{n+1} = xyx^{n+1}y(xy)^{n-1}z^{n+1} = \\ &= xyx^n(xy)^n z^n z = xyx^n(xy)^n x^n z^n z = xyx^{n+1}y(xy)^{n-1}x^n z^{n+1} = \\ &= xyxy(xy)^{n-1}x^n z^{n+1} = (xy)^{n+1}x^n z^{n+1} = (xy)^{n+1}x^n z = xyx^n z. \end{aligned}$$

Таким образом, мы вновь получаем, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет системе тождеств $(m2)$. Поскольку многообразия $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ удовлетворяют системе тождеств $(m2)$ для всякого натурального n, эта система тождеств выполнена и в $\mathcal{V}$. Двойственные рассуждения показывают, что если многообразие удовлетворяет условию M3) структурного варианта теоремы 1, то в нем выполнена система тождеств $(m3)$.

Далее, очевидно, что если многообразие удовлетворяет условию M4) структурного варианта теоремы 1, то оно удовлетворяет системе тождеств $(m4)$ для некоторого натурального n (в качестве n можно взять экспоненту группового многообразия $\mathcal{A}$).

Как уже отмечалось выше, $\mathcal{SL}$ удовлетворяет системам тождеств $(m5)$–$(m47)$ и $(\ell1)$–$(\ell11)$. Следовательно, если многообразие удовлетворяет условию M5) структурного варианта теоремы 1 (условию L5) теоремы 3), то оно удовлетворяет одной из систем тождеств $(m5)$–$(m47)$ (соответственно $(m5)$–$(m15)$, $(m20)$–$(m23)$, $(\ell1)$–$(\ell11)$).

Итак, требуемые утверждения доказаны. Одновременно мы доказали необходимость в эквациональном варианте теоремы 1 (поскольку всякое модулярное многообразие слабо полумодулярно вверх).

Литература

1. Верников Б. М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. №22 (Математика и механика. Вып.4.) С.16–45.
2. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Изв. вузов. Математика. 1989. №6. С.48–58.
3. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III // Изв. вузов. Математика. 1992. № 8. С.21–29.
4. Сапир М. В., Суханов Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1981. №4. С.48–55.
5. Vernikov B. M., Volkov M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol.12. P.391–417.
6. Pollák Gy. On the consequences of permutation identities // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. Vol.34. P.323–333.

Статья поступила 21.03.2001 г.