УДК 517.531

Е. А. Митюшов, Л. Л. Митюшова

АНИЗОТРОПНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Введение

Традиционный подход к описанию векторных свойств заключается в использовании правил преобразования координат вектора при изменении базиса. Это неявно предполагает существование абсолютного, изотропного физического пространства. Не менее продуктивным для приложений, а может быть, во многих случаях и более естественным является предлагаемый способ изучения векторных свойств, основывающийся на введении структуры пространства, задаваемой базисом. Это означает, что физическое пространство при введении базиса рассматривается уже как анизотропное, и отображения в себя этого пространства удовлетворяют условию инвариантности относительно соответствующей группы преобразований (не меняющей структуры физического пространства).

В дальнейшем структура физического пространства связывается с симметрией, задаваемой его базисом. Например, структура обычного трехмерного пространства, следуя принятой физической классификации [1], может быть представлена шестью сингониями:

1) триклинной – векторы базиса не равны по модулю и взаимно не перпендикулярны, нет характерной симметрии;

2) моноклинной – векторы базиса не равны по модулю, один из базисных векторов перпендикулярен двум другим, ось симметрии второго порядка или плоскость симметрии;

3) ромбической – векторы базиса не равны по модулю и взаимно перпендикулярны, три оси симметрии второго порядка или три плоскости симметрии;

4) гексагональной – два вектора базиса равны по модулю и образуют угол $\dfrac{2\pi}{3}$, третий вектор им перпендикулярен и не равен первым двум, ось симметрии шестого порядка;

5) тетрагональной – векторы базиса взаимно перпендикулярны и два из них равны, ось симметрии четвертого порядка;

6) кубической – векторы базиса равны и взаимно перпендикулярны, три оси симметрии четвертого порядка или четыре оси симметрии третьего порядка.

Так, прямоугольной декартовой системе координат с нормированным базисом соответствует кубическая структура пространства. При этом преобразования базиса (48 преобразований, образующих группу), связанные с инвариантными поворотами вокруг осей симметрии и отражениями, не меняют структуры пространства.

2. Свойства анизотропных векторных пространств

Пусть структура s-мерного пространства задана базисом $e_1, e_2, \ldots, e_s$. В случае ортонормированного базиса структура пространства обладает симметрией s-мерного куба. Количество независимых преобразований базиса, сохраняющего структуру пространства, в этом случае равно $2^s s!$.

Определение 1. *Директором ортонормированного базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_s$ *называется вектор* $D = (1, 1, \ldots, 1)$.

Из определения следует, что директор базиса образует с векторами данного базиса одинаковые углы, а квадрат его длины равен размерности пространства.

Помимо линейных операций сложения векторов и умножения вектора на число введем операцию умножения двух векторов.

Определение 2. *Произведением двух векторов* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ *и* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$ *в ортонормированном базисе называется вектор*

$$ab = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_s b_s).$$

Можно убедиться, что при всех преобразованиях базиса, соответствующих его группе симметрии, произведение векторов не меняется, а скалярное произведение $a \cdot b$ – это скалярное произведение вектора ab с директором базиса, т. е.

$$a \cdot b = (ab) \cdot D.$$

Определение 3. *Анизотропным s-мерным векторным пространством* $\widetilde{\mathbb{R}}^s$ *назовем линейное векторное пространство, в котором операция умножения двух векторов инвариантна относительно преобразований симметрии ортонормированного базиса.*

В пространстве $\widetilde{\mathbb{R}}^s$ выполняются аксиомы коммутативного кольца с единицей:

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $\exists 0 :\ a + 0 = a$;
4) $\forall a\ \exists(-a) :\ a + (-a) = 0$;
5) $ab = ba$;
6) $(ab)c = a(bc)$;
7) $(a + b)c = ac + bc$;
8) $aD = a$.

Кроме того, для любого вектора $a \in \widetilde{\mathbb{R}}^s$ такого, что $\prod_{i=1}^{s} a_i \neq 0$, существует такой вектор a^{-1}, что

9) $aa^{-1} = a^{-1}a = D$.

Директор базиса – это вектор-единица анизотропного пространства $\widetilde{\mathbb{R}}^s$, а в силу свойств 1–9 в пространстве $\widetilde{\mathbb{R}}^s$, можно выполнять алгебраические и функциональные операции, аналогичные операциям над полем вещественных чисел. Легко проверяется, например, выполнение тождества:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Рассмотрим несколько элементарных примеров функциональной зависимости. Пусть структура двумерного физического пространства задана ортонормированным базисом. Рассмотрим в этом базисе векторную функцию радиус-вектора $x = (x_1, x_2)$ следующего вида:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{2.1}$$

где a, b, c – постоянные векторы.

Запись (2.1) означает, что каждому вектору $x = (x_1, x_2)$ пространства $\widetilde{\mathbb{R}}^2$ ставится в соответствие вектор $f(x)$ этого же пространства, т. е.

$$f :\ \widetilde{\mathbb{R}}^2 \to \widetilde{\mathbb{R}}^2.$$

Возведение вектора во вторую степень или, что то же самое, умножение вектора на себя дает $x^2 = xx = (x_1^2, x_2^2)$.

Равенство

$$(ax^2 + bx + c) \cdot D = 1 \tag{2.2}$$

есть каноническое уравнение линии второго порядка в векторной форме. Частный вид линии определяется значениями координат векторов a, b и c, а переход к координатной форме записи – выполнением операции скалярного умножения

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c_1 + c_2 = 1.$$

В обычном трехмерном пространстве со структурой ортонормированного базиса уравнению (2.1) соответствует поверхность

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 1.$$

Аналогично может быть записано уравнение поверхности второго порядка в s-мерном пространстве. Различие проявляется только при переходе к координатной форме записи, поэтому в дальнейшем будем рассматривать уравнение (2.2) как векторное уравнение поверхности второго порядка в s-мерном пространстве.

3. Приложение к задачам механики деформируемого твердого тела

Примером линейной векторной функции может служить векторная форма записи обобщенного закона Гука, устанавливающего связь шестимерного вектора напряжений с шестимерным вектором деформацией в произвольной точке анизотропного упругого тела

$$\lambda\varepsilon = \sigma,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6)$ – вектор истинных, по терминологии работы [2], модулей упругости; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6)$ – вектор деформаций; $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6)$ – вектор напряжений. То есть

$$(\lambda_1\varepsilon_1,\ \lambda_2\varepsilon_2,\ \lambda_3\varepsilon_3,\ \lambda_4\varepsilon_4,\ \lambda_5\varepsilon_5,\ \lambda_6\varepsilon_6) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$$

или

$$\lambda_k\varepsilon_k = \sigma_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, 6). \tag{3.1}$$

Для изотропного тела $\lambda_1 = 3K$ (K – объемный модуль), $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2G$ (G – модуль сдвига).

Для изотропных и кубически симметричных упругих тел координаты вектора деформаций и напряжений выражаются через компоненты соответствующих тензоров равенствами

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{33}),$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{12};$$
$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}),$$
$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \sigma_4 = \sqrt{2}\sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sqrt{2}\sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sqrt{2}\sigma_{12}.$$

Тождественность с традиционной формой записи обобщенного закона Гука устанавливается непосредственно подстановкой координат векторов модулей упругости, деформаций и напряжений в уравнения (3.1) и их решением относительно неизвестных компонент тензора деформаций или тензора напряжений.

Для кубического кристалла и пространственно-армированных композитов, направления армирования которых совпадают с осями симметрии третьего и четвертого порядка трехмерного пространства кубической структуры, вектор модулей упругости характеризуется тремя независимыми координатами

$$\lambda = (3K, 2G_1, 2G_1, 2G_2, 2G_2, 2G_2),$$

где G_1 и G_2 – модули сдвига в плоскости, проходящей через оси симметрии второго и четвертого порядка в направлениях осей второго и четвертого порядка соответственно.

Удельная энергия деформации в точке твердого тела определяется произведением вектора напряжений на вектор деформаций:

$$\Phi = \frac{1}{2}\,(\varepsilon\sigma)\cdot D = \frac{1}{2}\,\varepsilon\cdot\sigma,$$

а с учетом равенств (3.1)

$$\Phi = \frac{1}{2}\,(\lambda_1\varepsilon_1^2 + \lambda_2\varepsilon_2^2 + \lambda_3\varepsilon_3^2 + \lambda_4\varepsilon_4^2 + \lambda_5\varepsilon_5^2 + \lambda_6\varepsilon_6^2).$$

Для изотропных и объемно-изотропных (первые инварианты тензора напряжений и деформаций пропорциональны) упругих тел первое слагаемое представляет удельную энергию изменения объема, а остальные – удельную энергию изменения формы.

Согласно общепринятой гипотезе о существовании предельной поверхности прочности в шестимерном пространстве напряжений эту поверхность можно записать в виде скалярного произведения векторной функции от вектора напряжений на директор шестимерного ортонормированного базиса:

$$f(\sigma)\cdot D = 1.$$

Если функцию в левой части представить полиномом степени n, то уравнение предельной поверхности имеет вид

$$P_n(\sigma)\cdot D = 1.$$

При независимости предельного состояния от шаровой части тензора напряжений, переходя к пятимерному пространству чистых сдвигов [3], простейшую поверхность прочности изотропного материала можно задать уравнением сферы в пятимерном пространстве:

$$(a\sigma^2)\cdot D = 1, \quad a = \bigl[0, \underbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}_{5}\bigr]$$

или

$$\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2 = 1/\alpha,$$

что соответствует широко применяемой энергетической теории прочности или условию текучести Губера–Мизеса–Генки математической теории пластичности.

Для пространственно-армированного композита кубической симметрии необходимость учета возможного разрушения по разным физическим механизмам (разрыв армирующих волокон при растяжении и потеря их устойчивости при сжатии) приводит в простейшем случае к четырехконстантной поверхности прочности в шестимерном пространстве напряжений:

$$(a\sigma^2 + b\sigma) \cdot D = 1, \quad a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, \alpha_3), \quad b = (\beta_1, 0, 0, 0, 0, 0),$$

или

$$\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_2^2 + \alpha_2\sigma_3^2 + \alpha_3\sigma_4^2 + \alpha_3\sigma_5^2 + \alpha_3\sigma_6^2 + \beta_1\sigma_1 = 1. \tag{3.2}$$

Физический смысл материальных констант этого уравнения становится ясным, если рассмотреть четыре независимых напряженных состояния:

1) $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p_+, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0;$

2) $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p_-, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0;$

3) $\sigma_{11} = -\sigma_{22} = \tau_1, \quad \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0;$

4) $\sigma_{23} = \tau_2, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0,$

где p_+ и p_- – предельные напряжения всестороннего растяжения и сжатия; τ_1 и τ_2 – предельные напряжения простого сдвига в плоскости, проходящей через оси симметрии второго и четвертого порядка, в направлениях осей второго и четвертого порядка соответственно.

Подстановка этих соотношений в равенство (3.2) дает

$$3\alpha p_+^2 + \sqrt{3}\beta_1 p_+ = 1; \quad 3\alpha p_-^2 - \sqrt{3}\beta_1 p_- = 1; \quad 2\alpha_2\tau_1^2 = 1; \quad 2\alpha_3\tau_2^2 = 1,$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{1}{3p_+p_-}; \quad \beta_1 = \frac{p_- - p_+}{\sqrt{3}p_+p_-}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\tau_1^2}; \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\tau_2^2}.$$

Равенство $p_+ = p_-$ свидетельствует об отсутствии эффекта Баушингера, что характерно для чистых металлов с кубической симметрией структуры и, очевидно, связано с сохранением механизмов деформации при смене знака нагрузки. Для пространственно-армированных композитов изменение механизмов деформации (или разрушения) приводит к неравенству $p_+ \neq p_-$ и появлению линейных членов в уравнении поверхности текучести (или прочности).

Приведенный пример показывает, что использование свойств пространства $\widetilde{\mathbb{R}}^s$ позволяет установить более глубокие связи рассматриваемых явлений с параметрами математических моделей.

Литература

1. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979.
2. Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 420–435.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: АН СССР, 1963.

Статья поступила 04.10.2002 г.