Т. Т. Усенко.

К вопросу о передаче тепла лучеиспусканием.

(Предварительное сообщение. Доложено в декабре 1918 года научному кружку профессоров и преподавателей У. Г. И.).

Излучение поверхностей в общем случае.

Пусть имеется две поверхности

$$F_1\,(x,\ y,\ z) = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{I}),$$

$$F_2\,(x,\ y,\ z) = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (\mathrm{II}),$$

отнесенные к одной системе координат (фиг. 1). Выделим на этих поверхностях элементарные площадки ∂s_1 на I и ∂s_2 на II. Пусть N_1 и N_2 представляют соответственно нормали к элементу каждой поверхности; x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2 z_2 — координаты тех точек соответствующей поверхности, у которых взяты элементарные площадки; A и B — эти точки; ρ — расстояние между A и B; α_1 и α_2 — углы образуемые осью ρ с нормалями N_1 и N_2.

Известно, что при этих условиях количество лучистой энергии, передаваемое от одной элементарной площадки к другой, может быть выражено формулой Ламберта

$$\partial Q = \frac{i\partial s_1\, \partial s_2\, Cos\,\alpha_1\ Cos\,\alpha_2}{\rho^2},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

где i есть *напряженность излучения.*

Формулу Ламберта (1) можно преобразовать, вставив в нее выражение ρ, $cos\,\alpha_1$, $Cos\,\alpha_2$ и ∂s_1 ∂s_2 через координаты точек A и B.

Известно, что

$$\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Для нахождения $Cos\,\alpha_1$ и $Cos\,\alpha_2$ необходимо взять уравнения нормалей N_1 и N_2 к поверхностям I и II в точках A и B.

Уравнение нормали N_1 имеет вид

$$\frac{x-x_1}{\frac{\partial F_1}{\partial x}}=\frac{y-y_1}{\frac{\partial F_1}{\partial y}}=\frac{z-z_1}{\frac{\partial F_1}{\partial z_1}}.$$

Уравнение нормали N_2—

$$\frac{x-x_2}{\frac{\partial F_2}{\partial x}}=\frac{y-y_2}{\frac{\partial F_2}{\partial y}}=\frac{z-z_2}{\frac{\partial F_2}{\partial z_2}}.$$

Уравнение прямой проходящей через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ представляется ввиде:

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}\ (\text{прямая } \rho)\ .$$

Принимая эти уравнения во внимание, находим:

$$Cos\,\alpha_1=Cos(\rho, N_1)=$$

$$=\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_1-x_2)+\frac{\partial F_1}{\partial x}(y_1-y_2)+\frac{\partial F_1}{\partial z}(z_1-z_2)}{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{1/2}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$Cos\,\alpha_2=Cos(\rho, N_2)=$$

$$=\frac{\frac{\partial F_2}{\partial x}(x_1-x_2)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(y_1-y_2)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(z_1-z_2)}{[x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{1/2}\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Как известно, элементы поверхностей могут быть представлены в следующем виде:

$$\partial s_1=\frac{\partial x_1\,\partial y_1}{Cos(N_1, z)}=\frac{\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\partial x_1\,\partial y_1\ ,$$

$$\partial s_2=\frac{\partial x_2\,\partial y_2}{Cos(N_2, z)}=\frac{\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}}{\frac{\partial F_2}{\partial z}}\partial x_2\,\partial y_2\ .$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1), и произведя необходимые сокращения, получаем общее выражение для вычисления элементарного излучения между двумя заданными поверхностями в следующем виде.

$$\partial Q = \frac{i\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_1-x_2)+\frac{\partial F_1}{\partial y}(y_1-y_2)+\frac{\partial F_1}{\partial z}(z_1-z_2)+\right]\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2}{\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}$$

$$\frac{i\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(x_1-x_2)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(y_1-y_2)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(z_1-z_2)\right]\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2}{\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}\quad . \; . \; . \; (2)$$

Чтобы определить количество энергии, переданное ограниченной заданным контуром частью поверхности I заданной части поверхности II, необходимо произвести интегрирование, показанное ниже:

$$Q = i\iiiint\left\{\frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_1-x_2)+\frac{\partial F_1}{\partial y}(y_1-y_2)+\frac{\partial F_1}{\partial z}(z_1-z_2)\right]}{\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial z}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(x_1-x_2)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(y_1-y_2)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(z_1-z_2)\right]}{\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial z}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}\right\}\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2 \quad . \; . \; . \; (3)$$

Частные случаи.

В паровых котлах и других технических устройствах чаще всего встречаются указанные ниже комбинации обменивающихся лучистой энергией поверхностей, являющихся частными случаями.

I. Комбинации плоскостей.

а) Плоскости параллельные.

б) Плоскости перпендикулярные.

в) Плоскости наклонные под любым углом.

II. Комбинация цилиндра и плоскости.

а) Плоскость наклонная под углом к оси цилиндра.

б) Плоскость вне цилиндра и параллельна его оси.

в) Плоскость перпендикулярна к оси цилиндра.

г) Плоскость внутри цилиндра и параллельна его оси (в частности диаметральная плоскость).

III. Комбинация плоскости и нескольких цилиндров с параллельными осями.

а) Плоскость наклонена под некоторым углом к направлению осей цилиндров.

б) Плоскость параллельна направлению осей цилиндров.

в) Плоскость перпендикулярна направлению осей цилиндров.

Цилиндры во всех случаях круговые.

Общее уравнение (2) *для частных случаев.*

I. а) Две параллельные плоскости (фиг. 2) при выбранной системе координат получается:

$$F_1(x, y, z) = z - h = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (I)$$

$$F_2(x, y, z) = z = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (II)$$

Отсюда

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 1; \quad z_1 = h;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 1; \quad z_2 = 0.$$

Уравнение (2) после подстановки принимает следующий вид:

$$\partial Q = \frac{i z_1^2 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \partial x_1 \partial y_1 \, \partial x_2 \partial x_2}{\frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \rho^4} = \frac{i \cdot h^2 \cdot \partial x_1 \partial y_1 \, \partial x_2 \partial y_2}{\rho^4} \quad \ldots (4)$$

Пусть на плоскости (I) имеется прямоугольник со сторонами $a+b$ и $c+d$ соответственно перпендикулярным осям x и y и на плоскости (II) также расположенный прямоугольник со сторонами $e+f$ и $g+h$. Все количество лучистой энергии передаиное одним прямоугольником другому может быть вычислено при помощи интегрирования (4):

$$Q = \int_{-b}^{a} \int_{-d}^{c} \int_{-f}^{e} \int_{-n}^{m} \frac{i h^2 \, \partial x_1 \partial y_1 \, \partial x_2 \partial y_2}{[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2]^2} \quad \ldots (5)$$

б) Две перпендикулярные плоскости (фиг. 3).

Уравнение I $\quad x = 0$,

Уравнение II $\quad z = 0$.

Отсюда

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 1.$$

В данном случае необходимо принять во внимание, что

$$\partial s_1 = \frac{\partial y_1 \, \partial z_1}{Cos(\rho, x)} = \partial y_1 \, \partial z_1 \frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_1 - x_2) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(y_1 - y_2) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(z_1 - z_2)\right]}{-\frac{\partial F_1}{\partial x}}$$

При этом общее уравнение (2) преобразуется следующим образом:

$$\partial Q = -\frac{i\,\partial z_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2\,\frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot z_1(-x_2)\,\frac{\partial F_1}{\partial x}}{\left(-\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\rho^4} = \frac{i\,z_1\,x_2}{\rho^4}\,dz_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2 =$$

$$= \frac{i\,z_1\,x_2\,\partial z_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2}{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

в) Плоскости наклонные друг к другу под углом (фиг. 4).

Выберем координатные оси так, чтобы прямая пересечения плоскостей была параллельна оси y—ков; тогда

Уравнение I — $(z_1-h)\;x - x_1\;r + x_1\;h = 0$,

Уравнение II — $z=0$.

Отсюда

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = z_1 - h\,; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -x_1\,;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 1\,.$$

Подставляя в уравнение (2), получаем:

$$\partial Q = \frac{i\,[(z_1-h)\,(x_1-x_2) - x_1\,(z_1-z_2)]\;(z_1-z_2)\;\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2}{(-x_1)\cdot 1\,[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}$$

Так как $z_2=0$ и $z_1 = h + x_1\,tg\,\beta$, то

$$\partial Q = \frac{i\,[z_1\,x_1 - z_1\,x_2 - hx_1 + hx_2 - x_1\,z_1 + x_1\,z_2]\,z_1}{-(x_1)\,[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}\,\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2 =$$

$$= \frac{-i\,[x_1\,x_2\,tg\,\beta + h\,x_1]\,z_1}{-x_1\,\rho^4}\,\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2 =$$

$$= \frac{i\,z_1\,(x_2\,Sin\,\beta + h\,Cos\,\beta)}{\rho^4}\cdot\frac{\partial x_1\,\partial y_1}{Cos\,\beta}\,\partial x_2\,\partial y_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Из (7) легко получаются уравнения, выведенные раньше для параллельных и перпендикулярных плоскостей, если положить

$$\beta_1 = 0 \text{ и } \beta_2 = \frac{\pi}{2},$$

и принять во внимание, что в случае параллельных плоскостей $z=h$, а при перпендикулярных плоскостях $\frac{\partial x_1}{Cos\,\beta} = l = \partial z_1$ в пределе.

Итак получаем следующие выражения для количества энергии излучаемой элементом одной плоскости элементу другой:

А. Произвольно расположенные плоскости

$$\partial Q = \frac{i z_1 (x_2 \, tg \, \beta + h)}{\rho^4} \partial x_1 \, \partial y_1 \, \partial x_2 \, \partial y_2 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Б. Параллельные плоскости ($\beta = 0$; $z_1 = h$)

$$\partial Q = \frac{ih^2}{\rho^4} \partial x_1 \, \partial y_1 \, \partial x_2 \, \partial y_2 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

В. Перпендикулярные плоскости ($\beta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\partial x_1}{Cos\,\beta} = l = \partial z_1$)

$$\partial Q = \frac{i z_1 x_2}{\rho^4} \partial z_1 \, \partial y_1 \, \partial x_2 \, \partial y_2 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

II. Комбинация плоскостей и цилиндра.

Возьмем круговой цилиндр расположенный так, что его ось проходит через начало координат, лежит в плоскости ZOY и наклонена к оси Y под углом γ (фиг. 5).

Уравнение этого цилиндра выражается следующим образом:

$$x^2 + (z \, Cos \, \gamma + y \, Sin \, \gamma)^2 - z^2 = 0$$

Возьмем на этом цилиндре точку с координатами x_1, y_1, z_1 и у этой точки элемент поверхности ∂s_1, проэкция которого на плоскость XOY есть $\partial x_1 . \partial y_1$.

За излучающую плоскость принимаем плоскость XOY и на ней возьмем точку x_2, y_2, z_2 с элементом поверхности $\partial s_2 = \partial x_2 \, \partial y_2$.

Воспользуемся общим уравнением (2).

Имеем:

$$F_1 (x, y, z) = x^2 + (z \, Cos \, \gamma + y \, Sin \, \gamma)^2 - z^2 = 0 ,$$
$$F_2 (x, y, z) = z = 0 .$$

Отсюда

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2z \, Cos \, \gamma \, Sin \, \gamma + 2y \, Sin^2 \gamma ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z \, Cos^2 \gamma + 2y \, Sin \, \gamma \, Cos \, \gamma ;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 1 ; \quad z_2 = 0 .$$

Для взятой на поверхности цилиндра точки с координатами x_1, y_1, z_1 эти выражения принимают вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x_1 ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2z_1 \, Cos \, \gamma \, Sin \, \gamma + 2y_1 \, Sin^2 \gamma ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z_1 \, Cos^2 \gamma + 2y_1 \, Sin \gamma \, Cos \gamma$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2) получаем:

$$\partial Q = i \, (z_1 - z_2) \left\{ \frac{2x_1(x_1 - x_2) + (2y_1 Sin^2\gamma + 2z_1 Cos\gamma Sin\gamma)(y_1 - y_2) +}{\rho^4 \, . \, 1 \, . \, [2z_1 Cos^2\gamma + 2y_1 Sin\gamma Cos\gamma]} \right.$$
$$\left. \frac{+ (2z_1 Cos^2\gamma + 2y_1 Sin\gamma Cos\gamma)(z_1 - z_2)}{\rho^4 \, . \, 1 \, . \, [2z_1 Cos^2\gamma + 2y_1 Sin\gamma Cos\gamma]} \right\} \partial x_1 \, \partial y_1 \, \partial x_2 \, \partial y_2 =$$

$$= iz_1 \left\{ \frac{x_1^2 - x_1 x_2 + y_1^2 Sin^2\gamma + y_1 z_1 Cos\gamma Sin\gamma - y_1 y_2 Sin^2\gamma}{\rho^4 (z_1 Cos^2\gamma + y_1 Sin\gamma Cos\gamma)} - \right.$$

$$\left. - \frac{z_1 y_2 Cos\gamma Sin\gamma + z_1^2 Cos^2\gamma + z_1 y_1 Cos\gamma Sin\gamma}{\rho^4 (z_1 Cos^2\gamma + y_1 Sin\gamma Cos\gamma)} \right\} \partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2 =$$

$$= iz_1 \left\{ \frac{x_1^2 + y_1^2 Sin^2\gamma + 2y_1 z_1 Cos\gamma Sin\gamma + z_1^2 Cos^2\gamma - x_1 x_2}{\rho^4 (z_1 Cos^2\gamma + y_1 Sin\gamma Cos\gamma)} - \right.$$

$$\left. - \frac{y_1 y_2 Sin^2\gamma - z_1 y_2 Cos\gamma Sin\gamma}{\rho^4 (z_1 Cos^2\gamma + y_1 Sin\gamma Cos\gamma)} \right\} \partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2 =$$

$$= iz_1 \left\{ \frac{(r^2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 Sin^2\gamma - z_1 y_2 Cos\gamma Sin\gamma)}{\rho^4 [z_1 Cos^2\gamma + y_1 Sin\gamma Cos\gamma]} \right\} \partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2 \quad . \; . \; . \; . \; (9)$$

Таково общее уравнение для комбинации плоскости и цилиндра, указанных во II группе.

Случай диаметральной плоскости (фиг. 6).

Положим $\gamma = 0$.

Из уравнения (9) получаем:

$$\partial Q = \frac{iz_1 (r^2 - x_1 x_2)}{\rho^4 z_1} \partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2 = \frac{i (r^2 - x_1 x_2)}{\rho^4} \partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2 \; . \; . \; (10)$$

Это уравнение получается и непосредственно из рассмотрения соответствующего чертежа.

Легко убедиться, что уравнение годится для случаев, когда плоскость параллельная оси цилиндра совпадает с диаметральной плоскостью, не совпадает с ней и даже находится вне цилиндра.

Случай плоскости перпендикулярной к оси цилиндра (фиг. 7).

Чтобы получить уравнение для комбинации кругового цилиндра и плоскости перпендикулярной к его оси, необходимо в уравнении (9) положить $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и кроме того принять во внимание, что $\frac{\partial y_1}{Cos\gamma} = \partial l$; а в пределе $= \partial z_1$.

Считаясь с этими замечаниями для этого случая получаем:

$$\partial Q = \frac{i (r^2 - x_1 x_2 - y_1 y_2) z_1}{\rho^4 y_1} \partial x_1 \partial z_1 \partial x_2 \partial y_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Уравнение для случаев группы III могут быть получены при помощи уравнений соответственных случаев группы II.

Излучение параллельных плоскостей.

Перейдем к определению количества тепла переданного площадью прямоугольника $(a+b) \cdot (c+d)$ одной плоскости, прямоугольника $(e+f)\,.\,(m+n)$ другой плоскости, при условии параллельности сторон прямоугольников (фиг. 2).

Полагая i независимым от координат элементов излучающего и воспринимающего тепло, вынесем его за знак интеграла.

При этом придется вычислить следующее выражение:

$$Q=i\int_{-b}^{a}\int_{-d}^{c}\int_{-f}^{e}\int_{-n}^{m}\frac{h^2}{\rho^4}\,\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2=i\int_{-b}^{a}\int_{-d}^{c}\int_{-f}^{e}\int_{-n}^{m}\frac{h^2\,\partial x_1\,\partial y_1\,\partial x_2\,\partial y_2}{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}$$

Будем интегрировать сначала по x_1.

Положим $x_1-x_2=hu$ и $y_1-y_2=hp$.

Тогда $\partial x_1=h\partial u$; $\partial y_1=h\partial p$.

Кроме того для данного случая $z_1-z_2=h$.

Преобразуем подинтегральное выражение

$$\frac{h^2\,\partial x_1}{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^2}=\frac{h^2\,h\partial u}{(h^2+h^2u^2+h^2p^2)^2}=\frac{\partial u}{h\,(1+p^2+u^2)^2}$$

Далее получаем

$$\frac{1}{h}\int\frac{\partial u}{(1+u^2+p^2)^2}=\frac{1}{h(1+p^2)}\int\frac{\partial u}{1+p^2+u^2}-\frac{1}{h(1+p_2)}\int\frac{u^2\,\partial u}{(1+p^2+u^2)^2}=$$

$$=\frac{u}{2h\,(1+p^2)\,(1+p^2+u^2)}+\frac{arctg\,\dfrac{u}{(1+p^2)^{1/2}}}{2h\,(1+p^2)^{3/2}}.$$

Интегрирование должно быть произведено в пределах a и $-b$ или

$$u_1=\frac{a-x_2}{h}\quad\text{и}\quad -u_2=-\frac{b+x_2}{h}.$$

Легко видеть, что при этом определенный интеграл будет состоять из четырех членов; все члены имеют знак $+$; эти четыре члена могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{arctg\,\dfrac{u_i}{(1+p^2)^{1/2}}}{2h\,(1+p^2)^{3/2}}+\frac{u_i}{2h(1+p^2)\,(1+p^2+u_i^2)},\quad\text{где } i=1,2.$$

В этих выражениях от y_1 зависит только p, а u_i от y_1 не зависит.

Для интегрирования по y_1 подставим $\partial y_1=h\partial p$, тогда будем иметь:

$$\frac{u_i}{2}\int\frac{\partial p}{(1+p^2)\,(1+p^2+u_i^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{arctg\,\dfrac{u_i}{(1+p^2)^{1/2}}\partial p}{(1+p^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int arctg\,\frac{u_i}{(1+p^2)^{1/2}}\,\partial\frac{p}{(1+p^2)^{1/2}}+\frac{u_i}{2}\int\frac{\partial p}{(1+p^2)(1+p^2+u_i^2)}=$$

$$=\frac{p}{2(1+p^2)^{1/2}}\,arctg\,\frac{u_i}{(1+p^2)^{1/2}}+\frac{u_i}{2}\int\frac{p^2\partial p}{(1+p)^2(1+p^2+u_i^2)}+$$

$$+\frac{u_i}{2}\int\frac{\partial p}{(1+p^2)(1+p^2+u_i^2)}=\frac{1}{2}\,\frac{p}{(1+p^2)^{1/2}}\,arctg\,\frac{u_i}{(1+p^2)^{1/2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{u_i}{(1+u_i^2)^{1/2}}\,arctg\,\frac{p}{(1+u_i^2)^{1/2}}$$

Этот результат состоит из четырех положительных членов, так как значек i имеет значения 1 и 2.

Для получения определенного интеграла, выраженного через координаты точек и величины пределов, необходимо подставить $u_1=\frac{a-x_2}{h}$, $u_2=\frac{b+x_2}{h}$ и кроме того $p_1=\frac{c-y_2}{h}$ и $p_2=\frac{d+y_2}{h}$ или $p_2=\frac{d+y_2}{h}$.

После этой подстановки получим 8 положительных членов, имеющих общий вид

$$\frac{1}{2}\,\frac{p_k}{(1+p_k^2)^{1/2}}\,arctg\,\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u_i}{(1+u_i^2)^{1/2}}\,arctg\,\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}}, \quad \ldots \quad (12)$$

где $i=1,2$ и $k=1,2$.

Для интегрирования по x_2 необходимо помнить, что от этой переменной зависит u_i и не зависит p_k.

При этом получается

$$a-x_2=h\,u_1;\quad \partial x_2=-h\,\partial u_1$$
$$b+x_2=h\,u_2;\quad \partial x_2=+h\,\partial u_2$$

Таким образом можно написать

$$\partial x_2=(-1)^i h\,\partial u_i.$$

После этого получаем для интегрирования по x_2 следующее выражение:

$$(-1)^i\frac{h}{2}\,\frac{p_k}{(1+p_k^2)^{1/2}}\int\partial u_i\,arctg\,\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}+(-1)^i\frac{h}{2}\int\frac{u_i\,\partial u_i}{(1+u_i^2)^{1/2}}\,arctg\,\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}}$$

Интегрируя по частям, находим

$$(-1)^i\frac{h}{2}\cdot\frac{p_k}{(1+p_k^2)^{1/2}}\,u_i\,arctg\,\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}-(-1)^i\frac{h}{2}p_k\int\frac{u_i\,\partial u_i}{1+p_k^2+u_i^2}+$$

$$+(-1)^i\frac{h}{2}(1+u_i^2)^{1/2}\,arctg\,\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}}+(-1)^i\frac{h}{2}p_k\int\frac{u_i\,\partial u_i}{1+p_k^2+u_i^2}=$$

$$=(-1)^i\frac{h}{2}\cdot\frac{p_k}{(1+p_k^2)^{1/2}}u_i\,arctg\,\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}+(-1)^i\frac{h}{2}(1+u_i^2)^{1/2}\,arctg\,\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}} \quad (13)$$

Вставляя в это выражение неопределенного интеграла вместо u_i—u_1 и u_2 и вместо p_k—p_1 и p_2, получим 4 члена после подстановки u_1 и u_2 и после подстановки p_1 и p_2—8 членов; из них 4 члена будут иметь знак $+(u_2)$ и четыре знак $-(u_1)$.

Для выяснения числа членов и их знаков у определенного интеграла рассмотрим следующую таблицу.

Табл. А.

$$u_i \begin{cases} \underset{(-)}{u_1}=\frac{a-x_2}{h}=\frac{a-e}{h} \text{—высший предел, знак не меняется } \alpha_1\ (-) \\ \underset{(-)}{u_1}=\frac{a-x_2}{h}=\frac{a+f}{h} \text{—нисший предел, знак меняется } \alpha_2\ (+) \\ \underset{(+)}{u_2}=\frac{b+x_2}{h}=\frac{b+e}{h} \text{—высший предел, знак не меняется } \alpha_4\ (+) \\ \underset{(+)}{u_2}=\frac{b+x_2}{h}=\frac{b-f}{h} \text{—нисший предел, знак меняется } \alpha_3\ (-) \end{cases}$$

Таким образом, 8 членов неопределенного интеграла превращаются в 16 членов интеграла определенного, причем, при подстановке высшего предела знаки не меняются, а при подстановке нисшего меняются. Если пределы интегрирования назвать α_i или для упрощения оставить прежнее обозначение u_i, считается лишь $i=1, 2, 3, 4$, то из таблицы (А) можно видеть, что знак члена определенного интеграла может быть найден из выражения $(-1)^i$, где i порядковый значек при α в таблице (А).

Таким образом, определенный интеграл, после интегрирования по x_2, может быть оставлен в том же виде, какой имел неопределенный с условием, что u_i имеет следующие значения:

$$u_1=\frac{a-e}{h};\quad u_2=\frac{a+f}{h};\quad u_3=\frac{b-f}{h};\quad u_4=\frac{b+e}{h}$$

При этом, при подстановке u_1 и u_3 получается 8 членов со знаком —, и при подстановке u_2 и u_4 восемь членов со знаком +.

Здесь u_i есть величина постоянная.

При интегрировании по y_2 необходимо иметь в виду, как и раньше, что

$$c-y_2=hp_1;\quad \partial y_2=-h\partial p_1=(-1)^k h\partial p_k;$$
$$d+y_2=hp_2;\quad \partial y_2=h\partial p_2=(-1)^k h\partial p_k.$$

Подставляя этот множитель в выражение (13), и беря интеграл, получаем:

$$(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}u_i\int\frac{p_k\,\partial p_k}{(1+p_k^2)^{1/2}}\,arctg\,\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}+$$

$$+(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}(1+u_i^2)^{1/2}\int\partial p_k\,arctg\,\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}}=$$

$$=(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}u_i(1+p_k)^{1/2}\,arctg\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}+(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}u_i^2\int\frac{p_k\,\partial p_k}{1+p_k^2+u_i^2}+$$

$$+(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}(1+u_i^2)^{1/2}p_k\,arctg\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}}-$$

$$-(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}(1+u_i^2)\int\frac{p_k\,\partial p_k}{1+p_k^2+u_i^2}=$$

$$=(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}\,u_i\,(1+p_k^2)^{1/2}\,arctg\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}+$$

$$+(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}(1+u_i^2)^{1/2}p_k arctg\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}}-$$

$$-(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}\int\frac{p_k\,\partial p_k}{1+p_k^2+u_i^2}=(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}u_i(1+p_k^2)^{1/2}arctg\frac{u_i}{(1+p_k^2)^{1/2}}+$$

$$+(-1)^{i+k}\frac{h^2}{2}(1+u_i^2)^{1/2}p_k\,arctg\frac{p_k}{(1+u_i^2)^{1/2}}-$$

$$-(-1)^{i+k+1}\frac{h^2}{2}lg(1+p_k^2+u_i^2)\quad\ldots\quad(14)$$

Таково окончательное выражение неопределенного интеграла в результате четырехкратного интегрирования.

При помощи соображений аналогичных приведенным выше (после интегрирования по x_2) можно убедиться, что и определенный интеграл в окончательном виде изображается так-же, но лишь значения k в этом случае должны как и для i выражаться числаии 1, 2, 3, 4; p_k является при этом постоянной величиной и

$$p_1=\frac{c-m}{h};\quad p_2=\frac{c+n}{h};\quad p_3=\frac{d-m}{h};\quad p_4=\frac{d-n}{h}.$$

Подставляя величины u_i и p_k в выражении (14) получим всего 48 членов, из которых 24 будут иметь знак $+$ и 24 знак $-$.

На основании предыдущего получим, что количество тепла, передаваемое элементом $\partial x_2\,\partial y_2$ одной плоскости прямоугольнику $a+b$, $c+d$ другой плоскости параллельной первой, выражается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
Q_1 = \frac{i}{2}\Bigg\{ & \frac{c-y_2}{[h_2+(c-y_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{a-x_2}{[h^2+(c-y_2)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{c-y_2}{[h^2+(c-y_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{b+x_2}{[h^2+(c-y_2)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{a-x_2}{[h^2+(a-x_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{c-y_2}{[h^2+(a-x_2)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{a-x_2}{[h^2+(a-x_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{d+y_2}{[h^2+(a-x_2)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{b+x_2}{[h^2+(b+x_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{c-y_2}{[h^2+(b+x_2)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{b+x_2}{[h^2+(b+x_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{d+y_2}{[h^2+(b+x_2)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{d+y_2}{[h^2+(d+y_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{a-x_2}{[h^2+(d+y_2)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{d+y_2}{[h^2+(d+y_2)^2]^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{b+x_2}{[h^2+(d+y_2)^2]^{1/2}} \Bigg\} \quad . \; . \; . \; . \; (15)
\end{aligned}
$$

Подобным же образом из выражения (14) можно получить количество тепла Q, переданное прямоугольником $a+b$, $c+d$ прямоугольнику $e+f$, $m+n$, лежащему в параллельной плоскости.

Если прямоугольники в обеих плоскостях имеют одинаковые размеры и расположены так, что вершины их лежат попарно на одном перпендикуляре, то выражение упрощается. В этом случае координатные оси всегда можно расположить так, чтобы можно было положить

$$
a=b=e=f=\frac{r}{2} \quad \text{и} \quad c=d=m=n=\frac{s}{2}.
$$

После подстановки и упрощений получаем:

$$
\begin{aligned}
Q = i \Bigg[& -2\, sh \operatorname{arctg}\frac{s}{h} - 2\, rh \operatorname{arctg}\frac{r}{h} + 2\, r\,(h^2+s^2)^{1/2} \operatorname{arctg}\frac{r}{(h^2+s^2)^{1/2}} + \\
& + 2\, s\,(h^2+s^2)^{1/2} \operatorname{arctg}\frac{s}{(h^2+r^2)^{1/2}} + h^2 \lg \frac{(h^2+s^2)(h^2+r^2)}{h^2(h^2+s^2+r^2)} \Bigg] = \\
= 2i \Bigg[& r(h^2+s^2)^{1/2} \operatorname{arctg}\frac{r}{(h^2+s^2)^{1/2}} + s(h^2+r^2)^{1/2} \operatorname{arctg}\frac{s}{(h^2+r^2)^{1/2}} - sh \operatorname{arctg}\frac{s}{h} - \\
& - rh \operatorname{arctg}\frac{r}{h} + \frac{h^2}{2} \lg \frac{(h^2+r^2)(h^2+s^2)}{h^2(h^2+s^2+r^2)} \Bigg] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16).
\end{aligned}
$$

Здесь r и s стороны прямоугольников.

В случае квадратов имеем

$$\frac{r}{2}=\frac{s}{2}=a=b=c=d=e=f=m=n.$$

После подставки в формулу (16) находим

$$Q=8i\left[a(h^2+4a^2)^{1/2}arctg\frac{2a}{(h^2+4a^2)^{1/2}}-ah\,arctg\frac{2a}{h}+\frac{h^2}{4}\,lg\frac{h^2+4a^2}{h(h^2+8a^2)^{1/2}}\right] \quad (17)$$

Исследование выражения (17).

Преобразуем выражение (17) следующим образом

$$\frac{Q}{4a^2 i}=\varphi=4\left\{\left[1+\left(\frac{h}{2a}\right)^2\right]^{1/2}arctg\frac{1}{\left[1+\left(\frac{h}{2a}\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{h}{2a}arctg\frac{1}{\frac{h}{2a}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2a}\right)^2 lg\frac{1+\left(\frac{h}{2a}\right)^2}{\frac{h}{2a}\left[2+\left(\frac{h}{2a}\right)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

Положим $\frac{2a}{h}=x$, тогда получим

$$\varphi=\frac{Q}{4a^2 i}=4\left[1+\frac{1}{x^2}\right]^{1/2}arctg\frac{1}{\left[1+\frac{1}{x^2}\right]^{1/2}}-\frac{4}{x}\,arctg\,x+$$

$$+2\cdot\frac{1}{x^2}lg\frac{1+x^2}{(2x^2+1)^{1/2}} \quad \ldots\ldots (18).$$

Положим здесь $x=0$, тогда получим неопределенное выражение, раскрывая которое находим $\varphi=0$.

Полагая $x=\infty$, тоже получим неопределенность, после раскрытия которой найдем $\varphi=\pi$.

Зависимость φ от x изображается кривой (фиг. 8), быстро поднимающейся от начала координат, и очень медленно, ассимптотически приближающейся к прямой $\varphi=\pi$.

На фиг. 9 даны еще кривые изображающие значения отдельных слагаемых в выражснии (18) для φ, а именно

$$\alpha=4\left[1+\frac{1}{x^2}\right]^{1/2}arctg\frac{1}{\left[1+\frac{1}{x^2}\right]^{1/2}},$$

$$\beta=\frac{4}{x}\, arctg\, x,$$

$$\gamma=2\ .\ \frac{1}{x^2}\, lg\frac{1+x^2}{(2x^2+1)^{1/2}}.$$

Геометрическое толкование выражения (15).

Для количества энергии, излучаемой элементарной площадкой некоторой плоскости на прямоугольную фигуру лежащую в плоскости параллельной, получено выражение представленное равенством (15).

Это выражение состоит из 8 членов одного и того-же типа, а именно: каждый член представляет произведение некоторой алгебраической функции величин a, b, c, d и x_2 y_2 на обратную круговой функцию тех-же величин.

Для примера рассмотрим первый член выражения (15), выясняя для каждого множителя отдельно его геометрический смысл.

Из фиг. 9 видно, что

$$\frac{c-y_2}{[h^2+(c-y_2)^2]^{1/2}}=Sin\,\delta_1 \text{ и } \frac{a-x_2}{(h^2+(c-y_2)^2]^{1/2}}=tg\varphi'_1 \text{ т. е. } arctg\frac{a-x_2}{(h^2+(c-y_2)^2]^{1/2}}=\varphi'_1$$

Угол δ_1 характеризует собой удаление стороны AB прямоугольника ABCD от основания перпендикуляра, опущенного из центра излучающей площадки на плоскость этого прямоугольника.

Назовем его для краткости *углом удаления*.

Пусть для других сторон прямоугольника углы удаления соответственно равны δ_2, δ_3, δ_4.

Подобно предыдущему из фиг. 9 видно, что

$$Sin\,\delta_2=\frac{a-x_2}{[h^2+(a-x_2)^2]^{1/2}};\quad Sin\,\delta_3=\frac{d+y_2}{[h^2+(d+y_2)^2]^{1/2}};\quad Sin\,\delta_4=\frac{b+x_2}{[h^2+(b+x_2)^2]^{1/2}}.$$

Угол φ'_1 является тем углом, под которым из центра излучающей площадки видна правая часть стороны AB прямоугольника.

В уравнении (15) у второго члена первый множитель таков же как и у первого, а второй множитель представляет из себя некоторый угол φ''_1, под которым видна левая часть стороны AB. Соединяя эти два члена получаем

$$Sin\ \delta_1\ (\varphi'_1+\varphi''_1)=\varphi_1\ Sin\ \delta_1.$$

Угол φ_1 есть тот угол под которым из центра излучающей площадки видна вся сторона AB. Назовем его для краткости ***углом зрения.***

Все уравнение (15) после преобразований подобных предыдущему принимает вид

$$Q=\frac{i}{2}\left[\varphi_1\ Sin\ \delta_1+\varphi_2\ Sin\ \delta_2+\varphi_3\ Sin\ \delta_3+\varphi_4\ Sin\ \delta_4\right]\ldots\quad(19).$$

При помощи интегрирования подобного тому, в результате которого получилось уравнение (15), можно убедиться, что равенство (19) справедливо также и для того случая когда вместо прямоугольника будем иметь треугольник.

Так как любую прямолинейную фигуру можно разбить на треугольники, то очевидно, что уравнение (19) справедливо для любой прямолинейной фигуры.

Равенство это может быть применено также и для любой криволинейной фигуры, как предельной для вписанной или описанной прямолинейной.

Таким образом можно указать следующую зависимость облегчающую решение многих частных случаев:

Количество тепла, излучаемого бесконечно малой площадкой какой либо плоскости на замкнутую фигуру лежащую в параллельной плоскости, выражается произведением интенсивности излучения на половину суммы членов, каждый из которых представляет произведение угла зрения на синус угла удаления соответствующей стороны фигуры.

Угол зрения всегда имеет положительную величину; что-же касается угла удаления, то здесь необходимо принимать во внимание знак.

Чтобы выяснить вопрос о знаке, необходимо представить себе, что элементарная площадка передвигается в положительном направлении оси у-ков. При этом угол δ_1 уменьшается приближаясь к нулю.

Когда y_1 станет $=C_1$ то $\delta_1=0$.

Дальнейшее движение площадки в положительном направлении оси у-ков приведет к отрицательным значениям угла δ.

Таким образом, каждая сторона фигуры, при бесконечном продолжении ея в обе стороны, делит плоскость на две части— в одной из этих частей находится фигура воспринимающая лучистую энергию.

Если основание перпендикуляра, опущенного из центра элементарной площадки на плоскость фигуры, находится в той части плоскости, где и фигура,—угол удаления имеет положительное значение; если-же основание перпендикуляра попадает в другую часть плоскости, то угол удаления получает отрицательное значение.

Для примера рассмотрим случай фиг. 10.

В этом случае углы δ_1 и δ_2 имеют знаки —, углы-же δ_3 и δ_4 знак $+$.

Количество тепла в этом случае выражается формулой

$$Q = z\frac{1}{2}\left\{-\varphi_1 \, Sin \, \delta_1 - \varphi_2 \, Sin \, \delta_2 + \varphi_3 \, Sin \, \delta_3 + \varphi_4 \, Sin \, \delta_4\right\}$$

25 Августа 1920 г.
г. Екатеринбург.

Т. Усенко.