

На правах рукописи

УДК 536.42:536.421.4

НИЗОВЦЕВА ИРИНА ГЕННАДЬЕВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ПРОЦЕССОВ НАПРАВЛЕННОГО ЗАТВЕРДЕВАНИЯ
ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ**

01.04.14 — Теплофизика и теоретическая теплотехника

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Екатеринбург, 2009

Работа выполнена на кафедре математической физики ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А.М. Горького"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Д.В. Александров.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор П.С. Попель.

доктор физико-математических наук,
профессор С.Ф. Борисов.

Ведущая организация: Институт теплофизики УрО РАН

Защита состоится “__” _____ 2009 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.01 при ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А.М. Горького" по адресу: 620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А.М. Горького".

Автореферат разослан “___” _____ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

Н.В. Кудреватых

Актуальность проблемы. Диссертационная работа "Математическое моделирование нестационарных процессов направленного затвердевания при наличии двухфазной зоны" посвящена исследованию нестационарных процессов направленной кристаллизации при наличии зоны фазового перехода, в которой одновременно присутствуют частицы твердой и жидкой фаз. Известно, что кристаллизация является необходимой стадией производства многих материалов. В части использования теории кристаллизации на практике следует упомянуть получение материалов с заданными свойствами в процессах направленного затвердевания в изложницах, процессах вытяжки кристалла из расплава, процессах получения сверхчистых сплавов путем перекристаллизации. Фронтальное описание процесса кристаллизации на основе макроскопических уравнений механики сплошных сред известно более ста лет и хорошо зарекомендовало себя на практике. Однако, большое количество проблем фронтальной кристаллизации до сих пор не имеет корректного теоретического решения. Данный факт объясняется нелинейностью уравнений и граничных условий, а также сложностью получения закона движения границы фазового перехода. Поиск решения тем более затруднен в условиях, когда процесс кристаллизации протекает в присутствии области совместного сосуществования двух фаз. Теоретическое описание двухфазной зоны с помощью макроскопических уравнений механики сплошных сред известно более 40 лет, однако вплоть до настоящего времени выражения для законов движения границ зоны известны лишь в исключительных случаях и носят приближенный характер. На сегодняшний день нет данных о законченных исследованиях процессов направленной кристаллизации, охватывающих, например, замерзание льдов с учетом эффектов турбулентного переноса (характерным примером является задача о возникновении ложного дна в океанических льдах). Такого рода ситуации возникают, например, при проникновении талой воды, собирающейся в лужи на поверхности льда, через трещины под его основание. Это приводит к образованию подледных полостей, заполненных талой водой. При этом соленость морской воды около льда падает практически до нулевых значений, что приводит к понижению температуры фазового перехода. Конвекция и возникающее переохлаждение приводят к зарождению и срастанию кристаллов, формирующих ледяную корку под поверхностью льда между слоями соленой и пресной воды, называемую ложным дном. Математические модели, учитывающие наличие такой области - двухфазной зоны и турбулентного движения жидкости в океане, до настоящего времени практически не рассматривались. Это связано с упомянутыми сложностями математической модели процесса, которая описывает движение границ фа-

зового перехода. В настоящей работе приведена такая нелинейная модель и получены ее аналитические решения. Спектр применимости полученных результатов очень широк: рассматриваемые в работе модели применимы в области металлургических процессов, а также современном материаловедении в части получения прогнозируемым образом материалов с заданными свойствами. Исследование проблематики настоящего проекта имеет приоритетное значение для развития научного потенциала Российской Федерации, традиционно заинтересованной как в изучении геофизических проблем, связанных с замерзанием льдов, так и в оптимизации металлургических процессов.

Цель работы. Аналитическое описание нелинейной нестационарной динамики процессов направленного затвердевания при наличии зоны двухфазного состояния вещества на различных этапах кристаллизации в зависимости от теплофизических параметров системы с учетом эффектов турбулентного переноса и явлений ложного дна. В качестве объекта исследований выступил процесс направленного затвердевания из жидкого состояния в твердое, вызванный понижением управляющей температуры на одной из границ системы. Предметному анализу и описанию были подвергнуты законы движения границ твердая фаза - двухфазная зона и двухфазная зона - жидкая фаза, возникающие при кристаллизации тепловые потоки, эффекты флуктуации скорости трения в разрезе их влияния на процесс затвердевания, а также явления образования ложного дна. Исследования проводились с использованием современного математического аппарата по решению дифференциальных уравнений с граничными условиями, поставленными на движущихся границах фазового превращения, и на основе физических представлений о зоне двухфазного состояния вещества.

Научная новизна диссертационной работы, посвященной исследованию нелинейной динамики нестационарных процессов затвердевания при наличии двухфазной зоны, состоит в получении новых аналитических результатов, описывающих кристаллизацию бинарных систем в части исследования актуальных проблем замерзания морских льдов и затвердевания сплавов с приложениями к описанию естественных природных явлений и реальных металлургических процессов, а именно: сформулированы новые нелинейные модели уравнений тепло- и массопереноса, учитывающие наличие движущихся границ области фазового перехода - двухфазной зоны и турбулентные течения жидкости в морской воде. Аналитически получены точные решения нелинейных моделей с учетом временных зависимостей температуры и солености морской воды на глубине, а также флуктуаций скорости трения. Определены распределения температуры и солености воды, доля твердой фазы и законы

движения границ фазового перехода. Все полученные в работе результаты, описанные в "Заключении" являются принципиально новыми и не имеющими прямых аналогов в мировой литературе.

Достоверность полученных результатов обеспечивается адекватностью используемых физических представлений, традиционными моделями тепло- и массопереноса, а также соответствием полученных теоретических результатов данным экспериментов, корректностью и строгостью математических вычислений и выкладок, общей согласованностью результатов.

Практическое значение. В диссертационной работе даны рекомендации по определению распределения температуры и солености воды, доли твердой фазы, законов движения границ фазового перехода "морская вода - двухфазная зона" и "двухфазная зона - талая вода" теплового потока на нижней границе ложного дна, который может изменять свое направление при временных осцилляциях температуры морской воды и скорости трения. Построенные аналитические решения нелинейных моделей кристаллизации с учетом временных зависимостей температуры и солености воды на глубине, а также флуктуаций скорости трения, полностью определяют влияние на процесс всех параметров системы (в частности, с их помощью можно производить расчеты теплового потока). Поскольку в металлургии известны примеры расплавов с физическими параметрами, подобными льду, разработанные модели и методы их решения пригодны для описания процессов затвердевания слитков. Поэтому развитые в работе теории позволяют полномасштабно использовать результаты в практических областях металлургии и геофизики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на представительных научных конференциях: 7-ой семинар по проблемам конденсированного состояния вещества (Екатеринбург, 2006), 13-я международная конференция „Liquid and amorphous metals“, LAM13 (Екатеринбург, 2007), XVI всероссийская школа-конференция „Математическое моделирование в естественных науках 2007" (Пермь, 2007), конференция молодых ученых "Неравновесные процессы в сплошных средах", НПСС-2007 (Пермь, 2007), YUCOMAT 2008 (Черногория, 2008), а также на научных семинарах в Институте металлургии УрО РАН и на семинарах кафедры математической физики Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, из них 4 статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК.

Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав основного содержания, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 121 страницу машинописного текста, она содержит 31 рисунок, 2 таблицы и 114 ссылок на литературные источники.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении кратко обоснованы актуальность работы, сформулированы ее цели, указаны научная новизна, практическое значение и апробация проведенных исследований.

Глава 1. Направленное затвердевание. Современное состояние проблемы

В первой, обзорной, главе диссертации представлена история вопроса и проанализирована ретроспектива развития научного интереса к проблематике фазовых переходов для случаев направленного затвердевания льдов и металлов, приведена модель классической задачи Стефана и ее модификация для случая затвердевания с протяженной областью фазового превращения. Материал излагается в духе классических работ и является созвучным со всеми главами диссертации.

Глава 2. Нестационарная кристаллизация морской воды в трещинах льдов. Модель изотермического океана

Вторая глава работы посвящена явлению кристаллизации морской воды в трещинах льдов, возникающих за счет океанических течений, ветра и других факторов, способных локально влиять на климат области [1].

Для решения проблемы использовался математический аппарат нелинейных диффузионных моделей типа Стефана [2, 3] с подвижными границами фазовых переходов, адаптированных для целей описания.

Поскольку фронтальная теория адекватно не описывает опытные данные (в реальных системах не существует четко выделенной границы фазового перехода), процесс кристаллизации описывался на основе модели равновесной двухфазной зоны концентрационного переохлаждения [2, 4, 5] с линейным температурным профилем по пространственной координате z и уравнением баланса массы в двухфазной зоне (уравнением Шейла) [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varphi) S_m] + k S_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad a(t) < z < b(t),$$

где $S_m(z, t)$ - концентрация примеси (соленость воды), φ - доля твердой фазы в двухфазной зоне, k - коэффициент распределения примеси, представляющий собой отношение концентраций раствора в твердой и жидкой фазах на границе фазового перехода. На движущихся границах двухфазной области ставились традиционные пограничные условия баланса тепла и массы, непрерывности температуры и концентрации примеси [2, 3]. Исследования проводились для модели изотермического океана.

В работе был проведен ряд математических преобразований, позволивших получить систему нелинейных уравнений для определения временных зависимостей координат границ двухфазной зоны $a(t)$ (граница твердая фаза - двухфазная зона) и $b(t)$ (граница двухфазная зона - жидкая фаза):

$$\left\{ \frac{L_V \varphi_b}{F(\varphi_b)} \frac{db}{dt} [b(t) - a(t)] + T_p - T_b \right\} (1 - k) \frac{da}{dt} = D_w \frac{L_V \varphi_b}{F(\varphi_b)} \frac{db}{dt}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{L_V}{k_i} (1 - \varphi_b) (T_p - T_b)^\alpha a(t) \left[\frac{da}{dt} + \frac{k_i \varphi_b}{F(\varphi_b)} (K - 1) \frac{db}{dt} \right] \times \\ & \times \left\{ T_p - T_b + [b(t) - a(t)] \frac{L_V \varphi_b}{F(\varphi_b)} \frac{db}{dt} \right\}^{-\alpha} = \\ & = T_b - T_0(t) - \frac{L_V \varphi_b}{F(\varphi_b)} b(t) \frac{db}{dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

где L_V - скрытая теплота кристаллизации, φ_b и T_b - доля твердой фазы и температура на границе $b(t)$, T_p - температура фазового перехода чистого вещества, D_w - коэффициент диффузии примеси, k_i и k_w - коэффициенты теплопроводности льда и воды, $T_0(t)$ - атмосферная температура (заданная на границе лед - атмосфера), $K = k_w k_i^{-1}$, $\alpha = (1 - k)^{-1}$, $F(\varphi_b) = k_i \varphi_b + k_w (1 - \varphi_b)$.

В работе было построено три приближенных аналитических решения нелинейной системы уравнений (1) и (2) для кристаллизации льда. Одно из таких решений, получаемое в пределе $a(t) \ll b(t)$, имеет следующий вид:

$$a(t) = \frac{D_w}{1 - k} \int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)} + a(0), \quad (3)$$

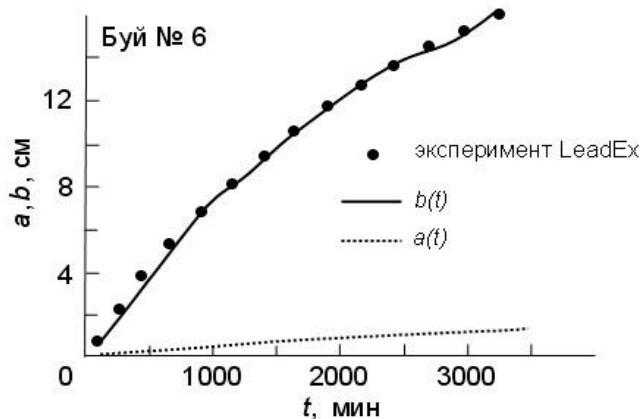


Рис. 1. Динамика границ двухфазной зоны по данным эксперимента [7].

$$b(t) = \left\{ \frac{2F(\varphi_b)}{L_V \varphi_b} \int_0^t [T_b - T_0(\tau)] d\tau + b^2(0) \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

где $a(0)$ и $b(0)$ - соответствующие первоначальные координаты границ. Уравнения (3) и (4) свидетельствуют о воздействии временной дисперсии на динамику процесса. Расчетные значения границ двухфазной зоны, построенные в соответствии с выражениями (3) и (4), изображены на рис. 1.

В рамках второй главы найдены точные аналитические решения нелинейной нестационарной задачи затвердевания бинарного вещества при произвольных временных колебаниях температуры на охлаждаемой границе для модели изотермического океана. В сравнении с результатами предшествующих работ (см., например, [8, 9]), проведено углубление и развитие теории по следующим направлениям: учтена зависимость от коэффициента распределения примеси, построены три новых аналитических решения задачи, определена доля твердой фазы на границе двухфазная зона - жидкая фаза, разработан метод решения задачи, основанный на использовании уравнения диффузии примеси вместо приближенного уравнения Шейла. В главе определены распределения температуры, концентрации растворенной примеси, доли твердой фазы, найдены законы движения межфазных границ, вычислен тепловой поток на границе лед - атмосфера.

Глава 3. Нестационарная кристаллизация морской воды в трещинах льдов.

Учет неизотермичности океана и турбулентного течения жидкости

В главе развита математическая модель процессов затвердевания от охла-

ждаемой по произвольному закону границы в присутствии двухфазной зоны для неизотермического океана в отсутствие и с учетом турбулизации жидкости на границе между двухфазной зоной и раствором соли.

Основное внимание в главе уделяется развитию теории более (в сравнении с предшествующими исследованиями) приближенной к естественным условиям: разработан подход учета турбулентного переноса тепла и массы, когда процесс кристаллизации сильно зависит от течения жидкости в океане (см., например, [10, 11]). С математической точки зрения эта ситуация соответствует новым пограничным условиям на границе двухфазная зона - океан. Заменяя тепловой и диффузионный потоки на границе двухфазная зона - жидкая фаза турбулентными потоками в соответствии с работой [11], получим:

$$L_V \phi_b \frac{db}{dt} = k_m(\phi_b) \frac{\partial T_m}{\partial z} - \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_\infty - T_b), \quad z = b(t), \quad (5)$$

$$S_b \varphi_b \frac{db}{dt} = D_w (1 - \varphi_b) \frac{\partial S_m}{\partial z} - \alpha_s u (S_\infty - S_b), \quad z = b(t), \quad (6)$$

где α_h и α_s - коэффициенты турбулентного переноса тепла и массы, u - скорость трения, T_∞ и S_∞ обозначают температуру и соленость морской воды в жидкой фазе вдали от границы $b(t)$, k_m - коэффициент теплопроводности в двухфазной зоне, ρ_w и c_{pw} - плотность и теплоемкость воды. Отношение коэффициентов турбулентного переноса определяется через отношение коэффициентов температуропроводности κ и диффузии D_w : $\alpha_h/\alpha_s = (\kappa/D_w)^n$, где $2/3 < n < 4/5$ [12, 13].

Остальные уравнения и граничные условия процесса, используемые в модели, имеют традиционный вид. В главе получены приближенные аналитические решения, соответствующие различным ростовым формам твердой фазы в двухфазной зоне с использованием зависимостей (5) и (6). При $\varphi_b = 0$, т.е. когда растущие кристаллы на границе имеют почти игольчатую форму, найден явный вид для координат движения границ двухфазная зона - океан и лед - двухфазная зона ($a(t) \ll b(t)$):

$$b(t) = \frac{k_w(T_0(t) - T_b(t))}{\alpha_h \rho_w c_{pw} u(t)(T_b(t) - T_\infty(t))},$$

$$a(t) = a(0) + \int_0^t \frac{(T_0(t) - T_b(t)) D_w}{b(t) T_0(t)} dt,$$

где $T_b(t)$ определяется выражением:

$$T_b(t) = -\frac{mS_\infty(t) + PT_\infty(t)}{1 - P}, \quad P = \frac{\alpha_h D_w}{\alpha_s \kappa}.$$

При $\varphi_b \neq 0$, т.е. когда растущие кристаллы на границе не игольчатой формы, а имеют более сложные размытые ростовые конфигурации, в общем случае решение задачи в работе сведено к задаче Коши для отыскания границы $b(t)$. Для ситуации медленных течений жидкости в океане вблизи границы со льдом в работе найдено явное аналитическое представление для зависимости $b(t)$, имеющее вид:

$$b(t) = \sqrt{2k_i D_w \int_0^t \frac{(T_b - T_0) dt}{D_w L_V - T_b k_w}} + b^2(0).$$

Кроме того, в работе получено аналитическое решение задачи для ситуации, когда скорость трения, температура атмосферы, температура и соленость в океане вдали от границы фазового превращения являются величинами постоянными (или заменяются средними). Это решение записывается в виде следующей обратной функции:

$$t(b) = \frac{1}{\alpha_1^2} \left[\frac{\alpha_2(b - b(0))}{2} (\alpha_1^2(b + b(0)) - 2\beta_1\alpha_1) + \alpha_1\beta_2(b - b(0)) - \right. \\ \left. - \beta_1(\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \ln \left| \frac{\alpha_1 b + \beta_1}{\alpha_1 b(0) + \beta_1} \right| \right],$$

где α_1 , α_2 , β_1 и β_2 являются определенными в диссертационной работе величинами. При этом, распределения температуры, солености воды и доли твердой фазы в двухфазной зоне находятся в явном виде.

Основным достоинством этой главы является разработка и решение математической модели, учитывающей наличие как протяженной области фазового перехода, так и турбулентных течений жидкости в океане при замерзании воды в трещинах льда.

Многие авторы в своих работах отмечают (см., например, [14-16]), что при контакте талой и соленой воды в месте их соприкосновения образуется ледяной пласт толщины несколько сантиметров. Этот пласт и называется ложным дном. Это явление часто возникает в весенне-летний период времени при просачивании талой воды сквозь ледовую толщу. В начале четвертой, завершающей диссертационную работу, главы приводятся некоторые аспекты образования ложного дна и история изучения этой проблемы. В работе впервые разработана математическая модель процесса эволюции слоя ложного дна - двухфазной зоны при наличии турбулизации жидкости на ее границе с океаном. Математическая модель процесса состоит из уравнений тепло-массопереноса и стандартных граничных условий баланса тепла и массы на границе $a(t)$ двухфазной зоны с располагающимся над ней слоем талой воды. Граничные условия на границе $b(t)$ ложного дна (двухфазной зоны) с океаном имеют вид условий (5) и (6).

В работе показано, что решение сформулированной нелинейной модели сводится к решению следующей системы уравнений для отыскания координат границ фазового превращения:

$$a(t) - b(t) = Q_1(T_a(t), t), \quad (7)$$

$$\frac{d(a(t) - b(t))}{dt} = \frac{Q_2(T_a(t))}{a - b} + Q_3(T_a(t), t), \quad (8)$$

где

$$Q_1(T_a(t), t) = -\frac{(k_i\varphi_b + k_w(1 - \varphi_b))(T_a - T_b)T_b}{\alpha_s u L_V (T_b + mS_\infty) + \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_\infty - T_b)T_b},$$

$$Q_2(T_a(t)) = \frac{(k_i\varphi_a + k_w(1 - \varphi_a))(T_a - T_b)}{L_V \varphi_a}, \quad Q_3(T_a(t), t) = \frac{\alpha_s u (T_b + mS_\infty)}{T_b \varphi_b},$$

а нижние индексы a и b обозначают величину, определенную на соответствующей границе; все входящие сюда величины определяются найденными в работе выражениями. При этом, аргументы функций Q_1 , Q_2 и Q_3 могут зависеть от времени в явном виде (не только с помощью зависимости $T_a(t)$), если u , T_∞ или S_∞ зависят от времени. Для постоянных значений параметров

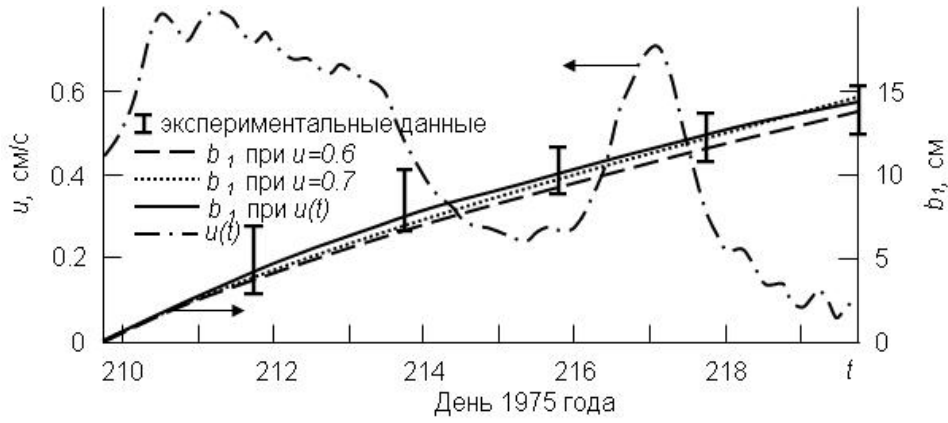


Рис. 2. Скорость трения по данным эксперимента "AIDJEX" (ось слева) и координата нижней границы двухфазной зоны (ложного дна) в соответствии с экспериментальными данными полевых наблюдений "AIDJEX" и развиваемой в работе теории (ось справа).

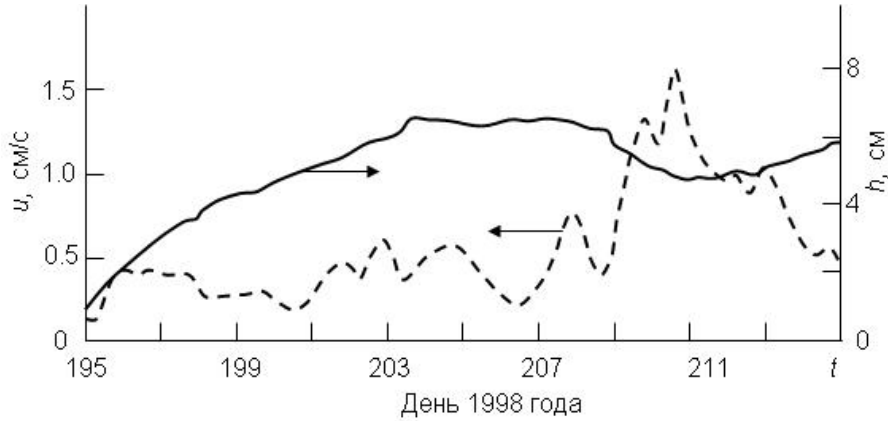


Рис. 3. Скорость трения по данным эксперимента "SHEVA" и рассчитанная на основе настоящей теории протяженность $h(t)$ двухфазной зоны (ложного дна), $a(0) - b(0) = 1$ см.

ров u , T_∞ и S_∞ (или когда эти параметры, зависящие от времени, заменены своими средними величинами), из выражений (7) и (8) в работе найден явный вид функции $t(T_a)$ (начальная температура T_{a0} находится из решения алгебраического уравнения (7)):

$$t(T_a) = \int_{T_{a0}}^{T_a} F(T_a) dT_a, \quad F(T_a) = \frac{dQ_1(T_a)}{dT_a} \frac{Q_1(T_a)}{Q_2(T_a) + Q_1(T_a)Q_3(T_a)}.$$

В более общей ситуации, когда одна из величин u , T_∞ или S_∞ зависит от времени, решение получено в виде задачи Коши для определения функции $T_a(t)$. При этом, законы движения границ $b(t)$ и $a(t)$ находятся в явном виде

$$b(t) = b(0) - \int_0^t \frac{\alpha_s u(T_b(T_a) + mS_\infty)}{T_b(T_a)\varphi_b} dt, \quad (9)$$

$$a(t) = b(t) + Q_1(T_a(t), t), \quad (10)$$

где $T_b(T_a)$ и $T_a(t)$ известны.

На рис. 2-4 приведено сравнение развиваемой теории с данными полевых наблюдений "AIDJEX" (Arctic ice dynamics joint experiment) и "SHEBA" (см., например, работы [17-20]). Рис. 2 показывает для полевых наблюдений "AIDJEX" экспериментальные значения скорости трения и расчетные значения нижней границы двухфазной зоны для различных скоростей трения ($b_1(t) = b(t) - b(0)$). Из рисунка видно, что координата b_1 ложного дна, рассчитанная по разным данным для скорости трения, лежит в пределах экспериментального разброса данных. На рис. 3 изображена скорость трения по данным полевых наблюдений "SHEBA" (см., например, работу [11]) и временные осцилляции толщины $h(t)$ двухфазной зоны (ложного дна), рассчитанные на основе развиваемой теории. Легко заметить, что возрастающая первоначально функция $h(t)$ становится убывающей после 207-го дня 1998 года. Смену знака первой производной функции обеспечил внезапный приход шторма, существенно увеличивший скорость $u(t)$. Вызванное увеличение потока соли, идущего в направлении от океана к границе ложное дно - океан, привело к ее немедленному плавлению (а значит, и к уменьшению протяженности двухфазной зоны). Увеличение солености приводит к понижению температуры фазового перехода в соответствии с соотношением $T_b = -mS_b$, в связи с чем температура T_b становится меньше температуры в океане T_∞ . Другими словами, разность температур $\Delta T = T_\infty - T_b$ становится положительной и тепловой поток $J = \alpha_h \rho_w c_{pw} u(T_\infty - T_b)$, идущий от границы ложное дно - океан в глубину океана, меняет свой знак. Иначе говоря, тепловой поток в этот промежуток времени направлен от океана в сторону ложного дна: представленное на основе развиваемой теории поведение функций изображено на рис. 4.

Рассматриваемая модель показывает, что тепловой поток на различных временах процесса может быть направлен как вверх, так и вниз со средней величиной -12.9 Вт/м^2 и -5.6 Вт/м^2 соответственно для экспериментов "AIDJEX" и "SHEBA". Этот поток оказывается сравним по величине с прочими, обеспечивающими вклад в результирующий тепловой поток, например, с потоком солнечной радиации или с колебаниями потока скрытого тепла, ко-

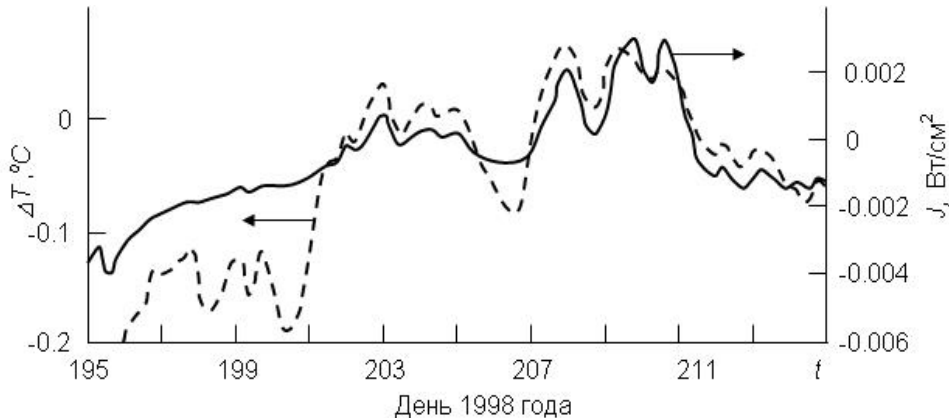


Рис. 4. Осцилляции разности температур ΔT и теплового потока, рассчитанные на основе развиваемой теории по данным полевых наблюдений „SHEVA“.

торый вызван замерзанием морской воды в трещинах льда. Так, по данным работы [21] последний из упомянутых потоков составляет от 8 до 40 Вт/м² (измерения проводились между 22 июня и 10 июля 1982 года, т.е. точно в летний период, для которого наиболее характерно формирование ложного дна). Последнее означает, что данный тепловой поток может оказывать существенное влияние на теплообмен между океаном и атмосферой.

Заключение

В работе "Математическое моделирование нестационарных процессов направленного затвердевания при наличии двухфазной зоны", посвященной исследованию вопросов сильно нелинейной динамики процессов кристаллизации, предложены решения сложных нелинейных задач с движущимися границами, представляющие собой разработку единого теоретического направления. Диссертационная работа содержит новые важные научные результаты и достижения по тематике фазовых переходов. Грамотный подход к нахождению сложных аналитических решений позволил получить ряд принципиально новых результатов.

Во второй главе исследована нелинейная динамика кристаллизации растворов и расплавов при учете коэффициента распределения примеси, построены три новых аналитических решения задачи, определена доля твердой фазы на границе двухфазная зона - жидкая фаза, разработан метод решения задачи, основанный на использовании уравнения диффузии примеси вместо приближенного уравнения Шейла. Развита модель, существенно отличающаяся от фронтальной модели и известных ранее подходов, адекватно описывает физическую картину процесса и хорошо согласуется с результатами

наблюдений. В рамках развиваемой модели получено теоретическое решение нестационарной проблемы замерзания морской воды при произвольных временных колебаниях температуры атмосферы. Определены распределения температуры, солености, доли твердой фазы, найден явный вид законов движения границ фазового перехода и протяженность двухфазной зоны. Получено аналитическое выражение для исходящего с поверхности льда в атмосферу потока тепла.

В третьей главе развита и обоснована математическая модель процессов затвердевания от охлаждаемой по произвольному закону границы в присутствии двухфазной зоны для неизотермического океана в отсутствие и при наличии турбулизации жидкости на границе между двухфазной зоной и раствором соли. Определены распределения температуры, солености и доли твердой фазы во всех регионах протекания процесса, в явном виде найден закон движения границы твердая фаза - двухфазная зона. Рассмотрены два сценария процесса: с нулевой (который описывает затвердевание с кристаллами игольчатой формы) и отличной от нуля (который описывает затвердевание с кристаллами с затупленной формой концов) долей твердой фазы на границе двухфазная зона - океан. Сформулирована задача Коши, получено трансцендентное уравнение или явное выражение для положения границы двухфазная зона - жидкая фаза в зависимости от различных условий реализации процесса. Результаты развитой теории находятся в хорошем соответствии с данными лабораторных наблюдений по кристаллизации водного раствора соли.

В четвертой главе развита и обоснована новая математическая модель процессов кристаллизации ложного дна на основе представлений о равновесной двухфазной зоне и граничных условий, учитывающих турбулентный перенос тепла и массы в придонном слое со стороны морской воды. Разработанная модель существенно отличается от фронтальной модели и известных ранее подходов, адекватно описывает физическую картину процесса и известные полевые наблюдения. Впервые получено аналитическое решение нелинейной нестационарной задачи с двумя движущимися границами фазовых переходов. Определены распределения температуры, солености и доля твердой фазы в двухфазном слое ложного дна, найдены законы движения его границ и тепловой поток. При этом решения получены в явном аналитическом виде для случая, когда температура и соленость в глубине океана, а также скорость трения не зависят от времени или заменяются не зависящими от времени средними величинами. В ситуации, когда эти характеристики являются функциями времени, решение проблемы сведено к задаче Коши. Показано, что температура и соленость в двухфазной зоне являются линей-

ными функциями пространственной координаты, а доля твердой фазы в ней претерпевает лишь незначительные пространственно-временные изменения. Продемонстрировано, что двухфазная зона мигрирует по направлению от соленой к пресной воде, ее толщина увеличивается со временем, а тепловой поток направлен от ложного дна в сторону соленой воды в спокойных условиях протекания процесса. Показано, что в условиях внезапного увеличения скорости трения (например, в результате прихода шторма), картина процесса меняется: протяженность двухфазной зоны может испытывать временные осцилляции, а тепловой поток изменять свое направление вследствие увеличения концентрации соли и соответствующего уменьшения температуры на границе ложное дно - океан. Произведены расчеты средних значений теплового потока на основе данных полевых наблюдений. Показано, что эти значения сравнимы по величине с другими возможными вкладами в результирующий тепловой поток рассматриваемой системы. Это означает, что процессы эволюции ложного дна приводят к возникновению значительных тепловых потоков, которые могут оказывать существенное влияние на теплообмен между океаном и атмосферой.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК:

1. D.V. Alexandrov, D.L. Aseev, I.G. Nizovtseva, H.-N. Huang, D. Lee *Nonlinear dynamics of directional solidification with a mushy layer* // International Journal of Heat and Mass Transfer – 2007. – Vol. **50** – P. 3616–3623.

2. Д.В. Александров, И.Г. Низовцева *Нелинейная динамика "ложного дна" в случае замерзания морской воды* // ДАН – 2008. – Том **419** – С. 262 – 265.

3. D.V. Alexandrov, I.G. Nizovtseva A.P. Malygin, H.-N. Huang, D. Lee *Unidirectional solidification of binary melts from a cooled boundary: analytical solutions of a nonlinear diffusion-limited problem* // Journal of Physics: Condensed Matter – 2008. – Vol. **20**. – P. 114105.

4. D.V. Alexandrov, I.G. Nizovtseva *To the theory of underwater ice evolution, or nonlinear dynamics of "false bottoms"* // International Journal of Heat and Mass Transfer – 2008. – Vol. **51**. – P. 5204-5208.

Другие публикации:

5. А.П. Малыгин, Д.В. Александров, И.Г. Низовцева *Нестационарные процессы направленного затвердевания растворов. Кристаллизация морской воды*// Тезисы докладов 7-го Семинара по Проблемам конденсированного состояния вещества. Екатеринбург, 2006. – С. 45.
6. А.П. Малыгин, Д.В. Александров, И.Г. Низовцева *Нестационарные процессы направленного затвердевания растворов. Приближенное аналитическое решение проблемы*// Тезисы докладов 7-го Семинара по Проблемам конденсированного состояния вещества. Екатеринбург, 2006. – С. 46.
7. D.V. Alexandrov, I.G. Nizovtseva, A.P. Malygin, H.-N. Huang, D. Lee *Unidirectional solidification of binary melts from a cooled boundary. Analytical solutions of nonlinear diffusion-limited problem*// Book of abstracts 13th Int. Conf. on Liquid and Amorphous Metals. Ekaterinburg, 2007. – С. 13
8. Д.В. Александров, И.Г. Низовцева *К теории эволюции подводного льда или нелинейная динамика "ложного дна"*// Тезисы докладов XVI Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов Математическое моделирование в естественных науках. Пермь, 2007. – С. 70
9. Д.В. Александров, И.Г. Низовцева *Нелинейная динамика процессов кристаллизации с двухфазной зоной*// Тезисы докладов VIII-й Молодежной школы-семинара по проблемам физики конденсированного состояния вещества при ИМФ УрО РАН. Екатеринбург, 2007. – С. 59.
10. Д.В. Александров, И.Г. Низовцева *Математическое моделирование нелинейных процессов формирования подледных океанических структур*// Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых к Неравновесные процессы в сплошных средах, Пермь, 2007. – С. 21-25.
11. D.V. Alexandrov, D.L. Aseev, S.V. Bulitcheva, I.G. Nizovtseva *Directional solidification of ternary alloys*// Book of abstracts 10th Annual Conference YUCOMAT 2008, Institute of Technical Sciences of the Serbian Academy of Sciences & Arts. Herceg Novi, Montenegro, 2008 – P. 71.

Список литературы

- [1] Badgley F.I., Heat budget at the surface of the Arctic Ocean, in Proceedings of the Symposium on the Arctic Heat Budget and Atmospheric Circulation.

- edited by J.O. Fletcher // Rand Corp., – Santa Monica, Calif., 1966, – P. 267-278.
- [2] Buyevich Yu.A., Alexandrov D.V., Mansurov V.V., Macrokinetics of crystallization // Begell House, New-York - Wallingford, 2001. – 184 p.
- [3] Worster M.G., Solidification of an alloy from a cooled boundary // J. Fluid Mech., 1986.- Vol. 167.- P. 481-501.
- [4] Иванцов Г.П., Диффузионное переохлаждение при кристаллизации бинарного сплава // ДАН СССР – 1951.- Том 81, №2. – С. 179–182.
- [5] Борисов В.Т., Теория двухфазной зоны металлического слитка // М.: Metallurgia, 1987. – 224 с.
- [6] Wettlaufer, Dash J.G., Fu H., Wettlaufer J.S. The premelting of ice and its environmental consequences // Rep. Prog. Phys., 1995.- Vol. 58.- P. 115-167.
- [7] J. Morison, M. McPhee, R. Muench et al., The LeadEx experiment // EOS. Trans. AGU 74, 1993. – P. 393 - 397.
- [8] Д.В. Александров, А.П. Малыгин, Аналитическое описание кристаллизации морской воды в трещинах льдов и их влияние на теплообмен между океаном и атмосферой// Доклады АН, 2006.- Тои 411, №3.- С. 390 - 394.
- [9] D.V. Alexandrov, A.P. Malygin, I.V. Alexandrova, Solidification of leads: approximate solutions of non-linear problem // Ann. Glaciol., 2006.- Vol. 44.P. 118-122.
- [10] M.G. McPhee, G.A. Maykut, J.H. Morison, Dynamics and thermodynamics of the ice/upper ocean system in the marginal ice zone of the Greenland sea // J. Geophys. Res., 92(C7), 1987. – P. 7017 - 7031.
- [11] D. Notz, M.G. McPhee, M.G. Worster, G.A. Maykut, K.H. Schlünzen, H. Eicken, Impact of underwater-ice evolution on Arctic summer sea ice // J. Geophys. Res., 108(C7), 2003. – P. 3223.
- [12] Owen P. R., Thomson W. R., Heat transfer across rough surfaces // J. Fluid Mech., 1963.- Vol. 15.– P. 321-334.
- [13] Yaglom A. M., Kader B. A., Heat and mass transfer between a rough wall and turbulent flow at high Reynolds and Peclet numbers // J. Fluid Mech., 1974.- Vol. 62.– P. 601-623.
- [14] Hanson A. N., Studies of the mass budget of Arctic pack-ice floes // J. Glaciol., 1965.- Vol. 5.– P. 701-709.

- [15] Зубов Н.Н., Льды Арктики // М.: Изд. Главсевморпути, 1945.
- [16] Unterstainer N., Badgley F. I., Preliminary results of thermal budget studies on Arctic pack ice during summer and autumn. In Arctic sea ice // Washington: U.S. Nat. Acad. Sci., Nat. Res. Counc. Publ., N 598, 1958.- P. 85-92.
- [17] Perovich D.K. et al., Year on ice gives climate insights // EOS Trans. AGU, 1999.- Vol. 80(481).- P. 485-486.
- [18] Eicken H. et al., Tracer studies of pathways and rates of meltwater transport through Arctic summer sea ice // J. Geophys. Res., 2002.- Vol. 107 (C10).- P. 8046.
- [19] Pritchard R. S., Sea ice processes and models // Seattle, Wash.: Univ. of Wash. Press, 1980.
- [20] McPhee M. G., Turbulent stress at the ice/ocean interface and bottom surface hydraulic roughness during the SHEBA drift // J. Geophys. Res., 2002.- Vol. 107(C10).- P. 8037.
- [21] Perovich D. K., Maykut G. A., Solar heating of a stratified ocean in the presence of a static ice cover // J. Geophys. Res., 1990.- Vol. 95(C10).- P. 18,233-18,245.

Работа частично выполнена при финансовой поддержке Министерства Образования и науки РФ в рамках Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/2571 - главы 1, 2), Федеральной целевой программы "Научные и научно- педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракты 02.740.11.0202 - главы 1, 3 и П 1071 - главы 1, 4).

Подписано в печать . Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. .
Заказ № . Тираж 100.

Отпечатано в ИПЦ “Издательство УрГУ”.
г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.