Задача наилучшего выбора и ее применение в рекламных кампаниях поисковой системы Яндекс

В. В. Мазалов
Институт прикладных
математических исследований
Карельский научный центр
Российской академии наук
vmazalov@krc.karelia.ru

А. А. Фалько
Институт прикладных
математических исследований
Карельский научный центр
Российской академии наук
afalco@ krc.karelia.ru

Аннотация

В работе рассматриваются математические модели задач наилучшего выбора применительно к рекламным кампаниям, заказываемых в поисковой системе Яндекс. На основе результатов численного моделирования даны практические рекомендации по выбору заказчиков рекламных кампаний. Показывается, что использование оптимальной стратегии выбора позволяет увеличить ожидаемую прибыль поисковой системы от продаж рекламных кампаний.

1. Введение

Задачи наилучшего выбора образуют один из важнейших классов задач, изучаемых теорией игр и теорией оптимальной остановки. Возникнув на основе реальных процессов выбора, эти задачи нашли применение в математических моделях социальных, политических и экономических систем. В задачах наилучшего выбора перед лицом, принимающим решение, стоит вопрос о выборе удовлетворяющего определенным критериям объекта из общего множества объектов в условиях различного вида неопределенностей и ограничений.

Существуют различные постановки задачи наилучшего выбора, но характерные черты задачи, как указано в [1], следующие:

– выбор осуществляется в несколько этапов;

– на процесс выбора наложены стратегические и информационные ограничения, связанные с полной или частичной недоступностью для выбора пропущенных вариантов и статистической неопределенностью качества будущих объектов;

– эффект выбора зависит только от сравнения выбранных объектов со всеми остальными объектами, и от некоторых внешних факторов (например, от затрат на проведение наблюдений);

– эффект выбора тем выше, чем лучше выбранные варианты.

В литературе, посвященной задачам наилучшего выбора, рассматриваются различные исходные постановки задачи. Одним из классифицирующих признаков является используемый критерий оптимальности. Существуют несколько вариантов критериев в задаче наилучшего выбора: 1) максимизация вероятности выбора наилучшего объекта, 2) максимизация математического ожидания выигрыша, 3) минимизация ожидаемого абсолютного ранга объекта. Первый критерий можно встретить в работах Suchwalko A., Szajowski K. [16], Николаев М. Л. [4, 5, 6]. Варианты задач, в которых используется второй критерий, рассмотрены в работах Baston V., Garnaev A.[8], Sakaguchi M. [13], Sofronov G., Keith J., Kroese D. [15], Ferguson T. [9]. Работы Sakaguchi M., Mazalov V. [14], Tamaki M. [17], Мазалов В. В., Фалько А. А. [3] посвящены решению задач с третьим типом критерия оптимальности. Адаптивные модели наилучшего выбора рассмотрены в работе Мазалов В. В., Домбровский Ю. А., Перрин Н. [2].

В представленной работе рассматривается оригинальная постановка задачи наилучшего выбора, имеющая приложение в практической задаче выбора заказчика рекламной кампании. При этом используются первый и второй типы из ранее указанных критериев оптимальности.

Задача выбора заказчика рекламной кампании состоит в следующем.

Поисковая система (продавец) рассматривается как лицо, принимающее решение. Объектами, среди которых необходимо выбирать, считаются ценовые предложения заказчиков на проведение рекламных кампаний. В работе рассматриваются рекламные кампании, организуемые поисковыми системами через продажу баннеров и ключевых слов контекстной рекламы.

Баннерная реклама предназначена для демонстрации рекламных объявлений заказчика всем посетителям поискового сайта Яндекс в Интернет (www.yandex.ru). На продажу выставляется место для двух баннеров большого формата с долей недельного трафика 50 %. Договор, как правило, заключается на показ рекламы в течение некоторого периода времени.

Рекламная кампания на основе контекстной рекламы в общем случае заключается в следующем. Рекламодатель покупает право на размещение своих объявлений, связанных с поисковыми запросами, содержащими определенные слова и словосочетания. В отличие от баннерной, контекстная реклама направлена на показ объявлений исключительно для целевой аудитории. Чем сильнее связаны ключевые слова демонстрируемой контекстной рекламы с деятельностью рекламодателя, и чем более популярны такие слова в поисковых запросах, тем больший эффект имеет реклама и тем больше ценятся ключевые слова.

В рассматриваемых задачах предполагается, что нет возможности удовлетворить спрос на рекламные баннеры и каждое из ключевых слов (словосочетаний) контекстной рекламы более чем двух рекламодателей. В связи с этим большой интерес представляет построение моделей выбора наилучшего заказчика (двух наилучших заказчиков) рекламной кампании, для увеличения ожидаемой прибыли, получаемой поисковой системой.

Для создания математической модели задачи выбора наилучшего заказчика баннерной рекламы принимаются следующие дополнительные предположения:

– рекламная кампания планируется ровно на одну неделю в течение некоторого заданного подготовительного периода (например, в течение предыдущей недели);

– в течение недели могут быть выставлены два (один) баннера различных фирм.

Для задач выбора наилучшего заказчика как баннерной рекламы, так и ключевых слов контекстной рекламы принимаются следующие дополнительные предположения:

– заказчики поступают к продавцу последовательно, по одному в каждый момент времени;

– количество потенциальных заказчиков в течение заданного периода равно N;

– заказчик может предложить любую цену;

– в случае отказа в выставлении его рекламы, заказчик в этот период заказа больше не делает (например, обращается к другому рекламодателю).

Задача заключается в выборе из N заказчиков одного (двух) наилучших, т.е. предлагающих наиболее высокие суммы за право размещения рекламных объявлений.

Научная и практическая новизна работы состоит в следующем: 1) были обобщены и применены к практической задаче выбора заказчика известные результаты работ ведущих ученых в области задач наилучшего выбора; 2) рассмотрены новые постановки задач наилучшего выбора; 3) проведено численное моделирование на основе реальных данных, предоставленных компанией Яндекс в рамках проекта; 4) даны практические рекомендации по выбору заказчиков рекламных кампаний поисковой системы Яндекс.

2. Описание методов, алгоритмов и экспериментов

2.1. Модели

В качестве математических моделей рассмотрены следующие постановки задач наилучшего выбора:

M_I: Случай, когда число заказчиков N – случайно или известно заранее, распределение цен неизвестно, а в качестве критерия предлагается максимизировать вероятность выбора одного (двух) лучших заказчиков.

Возможным считается решение, когда баннеры или слова не будут проданы никому.

M_II: Модель, в которой известно число заказчиков и распределение цен, а в качестве критерия оптимальности предлагается максимизировать вероятность выбора одного (двух) лучших заказчиков.

M_III: Случай, при котором нулевое решение исключается, то есть слова будут проданы одному (двум) последним заказчикам, если выбор по оптимальной стратегии не дал результата. Рассматривается следующая модель.

В качестве критерия принимается максимизация предлагаемых заказчиками цен (суммы цен). Возможны два варианта: 1) для известного распределения цен и 2) для неизвестного распределения цен (случай адаптивных моделей, существенно отличающихся от предыдущих вариантов).

M_IV: Теоретико-игровая постановка задачи с двумя конкурирующими поисковыми системами (далее – игроками): модель с доминирующим игроком – заказчики обращаются к одной поисковой системе, и лишь получив отказ, обращаются ко второй.

2.2. Модель I: N – постоянная величина, нет информации о ценах

В данной модели предполагается, что число заказчиков N является постоянной величиной, и отсутствует информация о распределении предлагаемых цен. Поисковая система стремится максимизировать вероятность выбора лучшего заказчика (двух лучших заказчиков).

1) **Выбор одного наилучшего заказчика**

Данная задача в литературе известна как классическая задача наилучшего выбора [1]. Для продавца заказчики упорядочены по рангу (абсолютный ранг). Ранг 1 имеет наилучший заказчик, ранг N – наихудший. Заказчики поступают последовательно в случайном порядке, при этом продавец наблюдает ранг i-того заказчика относительно всех предыдущих (относительный ранг). Абсолютные ранги заказчиков неизвестны поисковой системе.

Введем следующие обозначения: a_i – абсолютный ранг i-го заказчика, y_i – относительный ранг i-го заказчика. Вероятность того, что i-ое предложение будет абсолютно лучшим при условии, что оно лучше всех предыдущих равна

$$P(a_i = 1 / y_i = 1) = \frac{i}{N}$$

Оптимальная стратегия τ^* следующая

$$\tau^* = \min\{m \geq k^* : y_m = 1\},$$

где $m = k^*, \ldots, N$.

Вероятность удачного выбора по произвольной стратегии вычисляется по формуле (1).

$$P = \sum_{s=k}^{N} \frac{k-1}{N(s-1)} \tag{1}$$

Для достаточно больших N, полагая $\alpha = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{k}{N}$ получаем наибольшую вероятность $P = e^{-1} = 0.368$ при $\alpha = e^{-1} = 0.368$.

Так как число заказчиков у компании Яндекс достаточно велико, то, применяя полученные результаты, можно сформулировать оптимальную стратегию поисковой системы:

1) первые $[0{,}368 \cdot N]$ предложений заказчиков необходимо пропустить, при этом определяя значение K наивысшей цены из всех предложенных;

2) выбор заказчика:

– начиная с номера $[0{,}368 \cdot N] + 1$ принимается предложение заказчика с порядковым номером m, который предлагает цену M больше K.

Следуя этой стратегии, можно с максимальной вероятностью выбрать «наилучшего» заказчика.

Рассмотрим это на примере. В таблице 1 представлены данные, предоставленные компанией Яндекс. Пусть имеется 10 заказчиков, которые предлагают цены в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Значения предлагаемых цен для N = 10

k	1	2	3	4	5
Цена	74,68	152,17	10,23	14,85	0,06
k	6	7	8	9	10
Цена	2,37	25,36	220,52	168,04	27,53

Следуя оптимальной стратегии, продавец пропускает первые три предложения, и останавливается на предложении под номером 8. В результате он получает предложение заказчика 220.52.

1) **Выбор двух лучших заказчиков**

При тех же условиях необходимо выбрать двух лучших по качеству заказчиков.

В задаче наилучшего выбора необходимо найти оптимальную стратегию $\tau^* = (\tau_1, \tau_2)$, $1 \le \tau_1 < \tau_2 \le N$, для которой

$$P((a_{\tau_1^*} = 1, a_{\tau_2^*} = 2) \cup (a_{\tau_1^*} = 2, a_{\tau_2^*} = 1)) =$$

$$= \sup_{\tau_1, \tau_2} P((a_{\tau_1} = 1, a_{\tau_2} = 2) \cup (a_{\tau_1} = 2, a_{\tau_2} = 1)).$$

В этом случае оптимальная стратегия следующая

$$\tau_1^* = \min\{m \ge k^* : y_m = 1\}$$

$$\tau_2^* = \min\{\min\{n > m : y_n = 1\}, \min\{n > m : n \ge l^*, y_m = 1\}\}$$

на множестве $\{\omega : \tau_1^* = m\}$

Вероятность удачного выбора по произвольной стратегии (s, t) вычисляется по формуле (2).

$$P = \frac{(k-1)(l-2)}{N(N-1)} \sum_{s=k}^{l-2} \frac{1}{s-1} - \frac{(k-1)(l-k-1)}{N(N-1)} + \frac{2(k-1)}{N(N-1)} \sum_{s=k}^{N-1} \sum_{t=s+1}^{N} \frac{1}{t-2} + \frac{2(k-1)(l-2)}{N(N-1)} \sum_{s=k}^{l-1} \sum_{t=l}^{N} \frac{1}{(s-1)(t-2)} \quad (2)$$

Для достаточно больших N, полагая, как и раньше $\alpha = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{k}{N}$, $\beta = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{l}{N}$ получаем наибольшую вероятность $P \approx 0{,}025$ при $\alpha \approx 0{,}229$, $\beta \approx 0{,}607$.

Стратегия продавца выглядит следующим образом:

1) первые $[0{,}229 \cdot N]$ предложений заказчиков необходимо пропустить, при этом определяя значение K наивысшей цены из всех предложенных;

2) выбор заказчика первого баннера:

– начиная с номера $[0{,}229 \cdot N] + 1$ принимается предложение заказчика с порядковым номером m, который предлагает цену M больше K;

3) выбор заказчика второго баннера:

– до номера $[0{,}607 \cdot N] + 1$ принимается предложение заказчика с порядковым номером n, который предлагает цену T выше M,

– если такого заказчика не оказывается, то, начиная с номера $[0{,}607 \cdot N] + 1$ принимается заказчик, предложивший цену, которая ниже только цены M.

Данная задача была решена Николаевым в работе [4].

Рассмотрим пример, данный в табл. 1. Первых двух заказчиков продавец пропускает. Свой первый выбор он делает на 8-м шаге, второй – на 9-м. В результате он получает двух заказчиков, предлагающих цены 220.52 и 168.04.

2.3. Модель I: N – случайная величина

Предыдущую модель можно расширить, полагая, что число заказчиков N является случайной величиной (так как в действительности количество заказчиков неизвестно).

В данной модели предполагается, что если оптимальная стратегия не дала результатов, то не будет выбран ни один заказчик.

1) **Выбор одного наилучшего заказчика**

Пусть число заказчиков N является дискретной случайной величиной, распределенной равномерно от 1 до M. Обозначим вероятность удачного выбора по формуле (1) при постоянном N

$$Q(N) = \sum_{s=k}^{N} \frac{k-1}{N(s-1)}.$$

Тогда вероятность удачного выбора одного заказчика, если N является случайной величиной, вычисляется по формуле

$$P = \sum_{i=1}^{M} P(N=i) Q(i).$$

Так как при равномерном распределении

$P(N=i) = \frac{1}{M}$, то $P = \frac{1}{M} \sum\limits_{i=1}^{M} Q(i)$.

В табл. 2 даны значения оптимального k для различного числа заказчиков M (данные предоставлены компанией Яндекс за 2006–2007 год). Так как согласно этим данным M достаточно велико, то вероятность удачного выбора будет примерно равна 0,2707.

Таблица 2

Значения оптимального k для различных значений M

M	k^*	M	k^*
13277	1798	18022	2440
13700	1855	18211	2466
13958	1890	17986	2435
14014	1898	19278	2610
14561	1972	20731	2807
15636	2117	21709	2939
16942	2294		

Таким образом, оптимальная стратегия поисковой системы состоит в следующем: необходимо пропустить k заказчиков, при этом, запоминая наивысшую из предложенных цен, а затем выбрать того заказчика, который предложит цену, превышающую все предыдущие предложения.

Из данных, предоставленных компанией Яндекс, видно, что число заказчиков колеблется от 10000 до 30000. То есть распределение числа заказчиков можно предположить равномерным от 10000 до 30000. Тогда оптимальное k будет равно 6372, а вероятность успеха увеличивается до 0,35.

1) **Выбор двух лучших заказчиков**

Как и ранее пусть число заказчиков N распределено равномерно от 1 до M. Обозначим вероятность удачного выбора при постоянном N из формулы (2)

$$S(N)=\frac{(k-1)(l-2)}{N(N-1)}\sum_{s=k}^{l-2}\frac{1}{s-1}-\frac{(k-1)(l-k-1)}{N(N-1)}$$

$$+\frac{2(k-1)}{N(N-1)}\sum_{s=k}^{N-1}\sum_{t=s+1}^{N}\frac{1}{t-2}+\frac{2(k-1)(l-2)}{N(N-1)}\sum_{s=k}^{l-1}\sum_{t=l}^{N}\frac{1}{(s-1)(t-2)}.$$

Тогда вероятность успеха вычисляется по формуле $P=\sum_{i=1}^{M}P(N=i)S(i)$ или, учитывая, что $P(N=i)=\frac{1}{M}$, $P=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}S(i)$. Если же N распределено от M_1 до M_2, то $P=\frac{1}{M_2-M_1}\sum_{i=M_1}^{M_2}S(i)$.

Например, если N распределено равномерно от 100 до 300, то вероятность наилучшего выбора равна 0.239 при оптимальных $k^*=40$ и $\lambda^*=79$.

2.4. Модель II: N – постоянная величина, распределение цен известно

В данной модели при выборе заказчиков учитывается информация о предлагаемых ими ценах (известна функция распределения цен). Это так называемый случай с полной информацией.

1) **Функция распределения цен**

Для того чтобы смоделировать задачи, связанные с распределением предлагаемых цен, необходимо найти сами функции распределения цен или плотности распределения, так как исследуемые нами величины являются непрерывными.

Для нахождения функции распределения воспользуемся методами математической статистики. На основе предоставленной компанией Яндекс информации о ценах заказчиков контекстной рекламы, сделалась выборка из 114 значений цен. Ясно, что для различных областей рекламы распределения цен будут разными. Для моделирования были выделены четыре ярко выраженные области: отдых, строительство, производство и поставки, реклама (табл. 3).

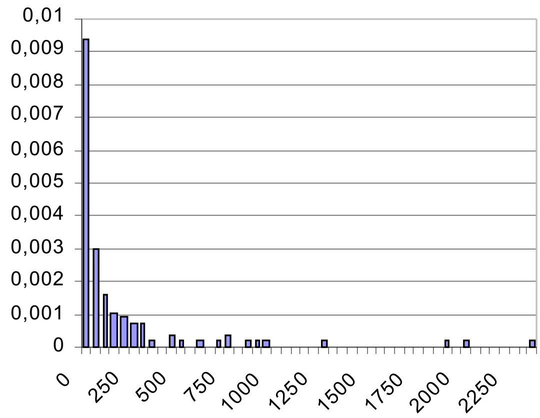
Методом наименьших квадратов были найдены функции распределения цен и их параметры.

Таблица 3

Функции распределения цен

Область	Количество заказчиков N	Функция распределения, $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ параметр λ
отдых	14	$\lambda=0{,}01$
строительство	10	$\lambda=0{,}02$
производство и поставки	32	$\lambda=0{,}006$
реклама	58	$\lambda=0{,}01$
все	114	$\lambda=0{,}008$

На диаграмме приведен пример плотности распределения общего количества цен N = 114 ($\lambda=0.008$). Учитывая полученную информацию о распределении цен, найдем решение в данной модели.



Плотность распределения цен N = 114 (λ = 0.008)

2) **Выбор одного наилучшего заказчика**

Пусть необходимо выбрать наилучшего заказчика, если известно распределение предлагаемых цен. В данной модели выбор осуществляется на основе однопороговой стратегии. То есть перед поступлением первого предложения указывается значение порога a. Предложение заказчика принимается, только если оно превышает значение a и отвергается иначе. Следовательно, в отличие от предыдущих рассмотренных задач, выбор может быть сделан уже на первом шаге.

Учитывая распределение цен, вероятность удачного выбора может быть вычислена следующим образом.

$$P=\sum_{i=1}^{N}(1-e^{-\lambda a})^{i-1}\left(\frac{1}{N-i+1}-\frac{(1-e^{-\lambda x_i})^{N-i+1}}{N-i+1}\right) \quad (3)$$

В табл. 4 даны численные результаты для различных N и λ.

Сравним значения вероятностей успешного выбора для случая без информации (Модель I) и случая с полной информацией (Модель II). Из полученных значений видно, что обладание информацией о распределении цен существенно повышает шансы на успех.

Рассмотрим пример для N = 32 и $\lambda=0{,}006$. В табл. 5 даны цены, предложенные заказчиками в области производства и поставок.

Таблица 4

Значение вероятностей удачного выбора для различных N и λ

Количество заказчиков N	Функция распределения, $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$, параметр λ	Значение порога a	Вероятность успеха
14	$\lambda = 0.01$	224.527	0.533766
10	$\lambda = 0.02$	95.7238	0.54068
32	$\lambda = 0.006$	510.701	0.524385
58	$\lambda = 0.01$	365.628	0.521205
114	$\lambda = 0.008$	541.306	0.519304

Таблица 5

Цены заказчиков в области производства и поставок N = 32, λ = 0,006

Цены, в у.е.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	258.57	68.49	20.99	450	48.04	194.8	257.02	211.25	2358.03
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
	51.08	338.44	33	29.54	14.64	211.33	28.55	336.38	163.11
	19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
	371.55	115.97	1239.75	222.03	146.41	115.97	28.63	72.6	44.5
	28	**29**	**30**	**31**	**32**				
	35.53	311.13	18.2	22.94	41.19				

Таблица 6

Значение вероятностей удачного выбора для различных N и λ

Количество заказчиков N	Функция распределения, $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$, параметр λ	Значение порога a	Вероятность успеха
14	$\lambda = 0.01$	177.961	0.386136
10	$\lambda = 0.02$	72.3362	0.398144
32	$\lambda = 0.006$	433.608	0.37082
58	$\lambda = 0.01$	319.483	0.365858
114	$\lambda = 0.008$	483.711	0.362944

Значение оптимального порога, вычисленное по формуле (3), $a = 510.701$. По оптимальной стратегии первые 8 заказчиков продавец пропускает, так как предложенные ими цены не превышают a. Свой выбор продавец должен сделать на 9-м шаге. В результате, он принимает предложение заказчика с ценой равной 2358.03.

3) **Выбор двух лучших заказчиков**

Пусть требуется выбрать двух лучших заказчиков, если известно распределение предлагаемых цен.

В данной модели также необходимо найти порог a для принятия наилучшего заказчика. Тогда вероятность удачного выбора вычисляется по формуле (4)

$$\begin{aligned} P &= 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N}\int_0^a dF(x_1)\ldots\int_0^a dF(x_{i-1})\int_a^\infty dF(x_i)\int_0^a dF(x_{i+1}) \\ &\ldots\int_0^a dF(x_{k-1})\int_{x_i}^\infty dF(x_k)\int_0^{x_i} dF(x_{k+1})\ldots\int_0^{x_i} dF(x_N) = \\ &= 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N}(1-e^{-\lambda a})^{k-2}\int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x_i}(1-e^{-\lambda x_i})^{N-k}e^{-\lambda x_i}dx_i \\ &= 2\sum_{i=2}^{N}(i-1)(1-e^{-\lambda a})^{i-2}\left(\frac{(1-e^{-\lambda a})^{N-i+2}}{N-i+2}-\frac{1}{N-i+2}\right. \\ &\left.-\frac{(1-e^{-\lambda a})^{N-i+1}}{N-i+1}+\frac{1}{N-i+1}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

В табл. 6 даны численные результаты для различных N и λ.

Рассмотрим вид оптимальной стратегии для ситуации, описанной в табл. 5. Оптимальная стратегия выглядит следующим образом: На каждом шаге устанавливается порог для принятия претендентов $a = 433.608$. По оптимальной стратегии первые 8 заказчиков продавец пропускает, так как предложенные ими цены меньше чем a. Выбор первого заказчика продавец должен сделать на 9-м шаге, а второго – на 21-м. В результате он принимает предложения двух заказчиков с ценами 2358.03 и 1239.75.

2.5. Модель II: критерий оптимальности – максимизация ожидаемой цены (суммы цен)

Критерий оптимальности – максимизация вероятности выбора наилучшего заказчика, не всегда может привести к получению наибольшей цены. Например, если наилучшие заказчики оказались в самом начале, то по описанной выше оптимальной стратегии продавец их не примет, и в результате может получить 0. В реальных ситуациях продавцу не обязательно выбирать самого лучшего, он лишь заинтересован в увеличении ожидаемой предлагаемой цены. Использование поисковой системой такого критерия оптимальности уменьшает вероятность выбора наибольшего предложения для каждой отдельной рекламной кампании, но увеличивает среднее получаемое значение при проведении большого числа рекламных кампаний.

Рассмотрим модель, в которой:

– последние заказчики принимаются;

– продавец стремится максимизировать математическое ожидание цен (суммы цен);

– распределение цен известно.

1) **Выбор одного заказчика**

Решение данной задачи находится методами динамического программирования. Обозначим u_i – выигрыш продавца на шаге i. На последнем шаге продавец принимает последнего заказчика, и его выигрыш в этом случае равен $u_N = \int_0^\infty x dF(x) = \frac{1}{\lambda}$ На шаге N-1 выигрыш равен

$$u_{N-1} = \int_0^{u_N} u_N dF(x) + \int_{u_N}^\infty x dF(x)$$

На шаге i-1 выигрыш вычисляется по рекуррентной формуле

$$u_{i-1} = \int_0^{u_i} u_i \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{u_i}^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Подсчитаем выигрыши игрока для данных, предоставленных поисковой системой Яндекс. В табл. 7 даны оптимальные пороги для принятия предложения заказчика при N = 32 и $\lambda = 0{,}006$. Используя указанные выше формулы, получаем следующую оптимальную стратегию для продавца (применительно к данным, представленным в табл. 5): продавец должен остановиться на 9-м шаге. В этом случае он принимает предложение заказчика, предложившего цену 2358.03.

2) **Выбор двух заказчиков**

В данной модели продавцу требуется выбрать двух заказчиков. При этом он стремится максимизировать математическое ожидание суммы предлагаемых цен. Определим следующие последовательности, на основе которых строятся значения выигрышей.

$$V_k = max\{ E_k V_{k,k+1}; E_k V_{k+1} \}, 1 \le k \le N-1 \qquad V_{N+1} = 0$$

$$V_{k,m} = max\{ X_k + X_m; E_{k,m} V_{k,m+1} \}, k+1 \le m \le N \qquad V_{k,N+1} = 0$$

$$u_k = EV_k$$

Обозначим u_k – выигрыш игрока на шаге k, если он выбирает первого заказчика, $u_{k,m}$ – выигрыш игрока на шаге m, если он выбирает второго заказчика при условии, что первого он уже выбрал на шаге k.

$$u_k = E(max\{X_k + u_{k,k+1}; u_{k+1}\}), 1 \le k \le N-1 \qquad u_{N+1} = 0;$$

$$u_{k,m} = E(max\{X_m; u_{k,m+1}\}), k+1 \le m \le N \qquad u_{k,N+1} = 0$$

Вычислим значения выигрышей

$$u_k = E(max\{X_k + u_{k,k+1}; u_{k+1}\})$$

$$= u_{k,k+1} + E(max\{X_k; u_{k+1} - u_{k,k+1}\})$$

$$= u_{k,k+1} + \int_0^{u_{k+1}-u_{k,k+1}} (u_{k+1} - u_{k,k+1}) dF(x) + \int_{u_{k+1}-u_{k,k+1}}^\infty x \; dF(x)$$

$$u_{k,m} = E(max\{X_m; u_{k,m+1}\})$$

$$= \int_0^{u_{k,m+1}} u_{k,m+1} dF(x) + \int_{u_{k,m+1}}^\infty x dF(x)$$

Для примера из табл. 5 получим, что ожидаемые выигрыши $u_{k,m}$ равны выигрышам, полученным для случая, когда выбирается один заказчик. Пороги для принятия первого заказчика даны в табл. 8.

Рассмотрим вид оптимальной стратегии для N = 32 и $\lambda = 0{,}006$ (на основе данных, представленных в табл. 5). На каждом шаге устанавливаются пороги для принятия претендента. По оптимальной стратегии первым принимается девятый заказчик, так как его цена 2358.03 больше ожидаемого выигрыша на десятом шаге (542.445), вторым принимается девятнадцатый заказчик, так как его цена выше ожидаемого выигрыша на следующем шаге (342.692). В результате, продавец получает в сумме 2729.58.

Нетрудно заметить, что для приведенного примера оптимальная стратегия дает хороший, но не самый лучший возможный результат.

2.6. Модель III: Адаптивные модели для неизвестного распределения цен

Рассмотрим модель, в которой:

– последние заказчики принимаются;

– продавец стремится максимизировать математическое ожидание цен (суммы цен);

– вид распределения предлагаемых заказчиками

Таблица 7

Значения выигрышей для N = 32 и λ = 0,006

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
u_k	592.863	587.968	582.922	577.717	572.341	566.783	561.029	555.066	548.877	542.445
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	20
	535.749	528.767	521.472	513.835	505.822	497.393	488.503	479.096	469.109	458.462
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
	447.062	434.791	421.501	407.004	391.05	373.304	353.294	330.327	303.321	270.421
	31	**32**								
	227.98	166.667								

Таблица 8

Значения порогов для N = 32 и λ = 0,006

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$u_{k+1} - u_{k,k+1}$	472.395	467.347	462.138	456.758	451.196	445.437	439.469	433.274	426.836	420.132
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	413.141	405.837	398.189	390.163	381.719	372.811	363.383	353.369	342.692	331.252
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
	318.932	305.579	290.997	274.929	257.021	236.771	213.422	185.748	151.49	105.353
	31	**32**								
	0									

цен известен, например, это экспоненциальное распределение, но параметр этого распределения λ неизвестен.

Предлагается адаптивная модель наилучшего выбора, в которой на каждом шаге продавец на основе полученных ранее предложений оценивает параметр распределения цен и, учитывая сделанную оценку, решает задачу наилучшего выбора.

Закон распределения имеет вид $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. В данной постановке параметр л неизвестен. Он оценивается в процессе наблюдения. Так как математическое ожидание такого распределения равно $1/\lambda$, то в качестве оценки л используется статистика, равная величине, обратной выборочному среднему, т. е. $\lambda_i = \frac{1}{a_i} = \left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} x_j\right)^{-1}$.

Будем предполагать, что на i-том шаге используется некоторая оценка λ_i параметра λ. Затем считается, что последующие наблюдения распределены по закону с полученным параметром. По мере поступления информации оценка уточняется.

После получения очередного наблюдения x_{i+1} выборочная средняя пересчитывается по формуле $a_{i+1} = a_i + (x_{i+1} - a_i)/(i+1)$.

Обозначим $f_\lambda(x)$ – плотность экспоненциального распределения $F_\lambda(x)$ с неизвестным параметром λ. $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Обозначим через $v(x, a, i)$, $i = 1, ..., N$, функцию максимального ожидаемого выигрыша на i-м шаге, когда текущая оценка среднего равна a. Тогда v удовлетворяет уравнению оптимальности

$$v(x,a,i-1) = max\left\{x, \int_0^\infty v(x, a + \frac{t-a}{a}, i) f_{1/a}(t)dt\right\}.$$

В случае, если до последнего шага не было сделано выбора, продавец вынужден остановиться на последнем предложении, следовательно, $v(x, a, N) = x$.

Нетрудно доказать, что функция $v(x, a, i)$ имеет вид

$$v(x,a,i-1) = max\{x, a\alpha_i\}, i = 2,..., N-1$$

где последовательность α_1 удовлетворяет рекуррентным формулам

$$\alpha_{N-1} = 1,...,\alpha_{i-1} = 1 + \alpha_i(1 - e^{-\beta} - \beta e^{-\beta}/i) - (1 - e^{-\beta} - \beta e^{-\beta}),$$

и где, в свою очередь, $\beta = (i-1)\alpha_i/(i-\alpha_i)$.

Теперь адаптивная схема выбора выглядит следующим образом. В начале для заданного объема выборки N вычисляется последовательность α_1, $i = N-1$, ..., 2. Далее необходимо следить за поступающими предложениями x_i, $i = 1, 2, ...$ По данным наблюдениям пересчитываем текущее выборочное среднее $a_1 = x_1, a_i = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} x_j$, $i \geq 2$.

Наконец, правило оптимального выбора выглядит так. Как только поступившее предложение x_i больше или равно $a\alpha_i$, продавец выбирает это наблюдение.

Продемонстрируем это на примере, рассмотренном выше, с ценами в области производства и поставок. В этом примере $N = 32$. Вначале вычисляем последовательность α_i, $i = 2, ..., N-1$. Последовательно находим $\alpha_{N-1} = 1$ и далее для $i = N-2, ..., 2$

1.356; 1.598; 1.782; 1.932; 2.057; 2.165; 2.258; 2.342; 2. 416; 2. 482; 2.543; 2.598; 2.648; 2.693; 2.734; 2.772; 2.806; 2.837; 2.864; 2.889; 2.909; 2.927; 2.941; 2.952; 2.959; 2.963; 2.964; 2.965; 2.965.

Теперь наблюдаем за предложениями и сравниваем их с величинами $a\alpha_i$. На первом шаге имеем $a_1 = x_1 = 258.57$. На втором шаге оценка $a_2 = 163.530$ и, значит, $a_2 \alpha_2 = 484.966$. Поскольку поступившее предложение $x_2 = 68.49$ меньше этого порога, отвергаем предложение. На третьем шаге оценка среднего $a_3 = 116.017$, и, значит, порог равен $a_3 \alpha_3 = 343.989$. Поступившее наблюдение $x_3 = 20.99$ опять меньше порога, его также отвергаем. В табл. 9 даны пороги для данного примера.

Таблица 9

Значения порогов для N = 32

Шаг	a_i	$a_i\alpha_i$
1	258.57	766.660
2	163.530	484.866
3	116.017	343.989
4	199.521	591.355
5	169.205	501.393
6	173.491	513.332
7	185.426	547.347
8	188.644	554.855
9	429.738	**1257.700**

Последовательно вычисляя пороги через поступившие наблюдения на шагах $i = 4, 5, \ldots, 8$, предложения последовательно отвергаются, но на 9-м шаге поступившее предложение $x_9 = 2358.03$ значительно превышает порог 1257.700, поэтому это предложение выбирается.

2.7. Модель IV: Теоретико-игровая постановка задачи с двумя конкурирующими поисковыми системами

Особый интерес представляют теоретико-игровые постановки задачи наилучшего выбора. Такие модели позволяют исследовать взаимное влияние двух конкурирующих поисковых систем на оптимальные стратегии поведения друг друга при поиске наилучшего заказчика рекламных компаний.

В представленной работе исследуется модель, в которой одна из поисковых систем является значительно более привлекательной (доминирует), нежели вторая. Это означает, что каждый потенциальный заказчик рекламной кампании обращается со своим предложением в первую поисковую систему и лишь в случае отказа, обращается ко второй поисковой системе. Такая ситуация дает лучшие шансы на получение выигрыша для доминирующего игрока.

Рассмотрим игру двух продавцов. Два продавца (I и II игроки) хотят выбрать по два заказчика. Заказчики поступают последовательно и предлагают цены, имеющие функцию распределения *F(x)*. Игроки стремятся максимизировать сумму предлагаемых заказчиками цен.

Рассмотрим случай, когда имеется доминирующий игрок (I игрок), т. е. при встрече с очередным заказчиком, заказчик решает разместить свою рекламу у I игрока, и лишь получив отказ, уходит ко II игроку.

Обозначим $u^1_{k,m}, u^2_{k,m}$ выигрыши игроков: если остался только один игрок (другой игрок уже выбрал обоих заказчиков) и два игрока соответственно, при этом игрок уже выбрал одного заказчика на шаге k ($1 \le k \le N-1$, $2 \le m \le N$) · u^1_k, u^2_k – выигрыши игроков для выбора первого заказчика, если остался один игрок или два игрока соответственно.

Для первого игрока оптимально вести себя так (в силу его доминируемости), если бы он один выбирал заказчиков. Его выигрыши равны $u^1_{k,m}$ и u^1_k соответственно. Для второго игрока, если первый игрок уже выбрал заказчика, выигрыши также равны $u^1_{k,m}$ и u^1_k соответственно.

Вычислим $u^2_{k,m}$ и u^2_k. При этом выигрыш второго игрока будут зависеть от того, выбрал ли первый игрок первого заказчика или нет. Обозначим выигрыши второго игрока, если первый игрок выбрал заказчика на шаге p как $u^2_{k,\,m+1}(\text{IB})$, $u^2_{k,\,m+1}(\text{IH})$, $u^2_k(\text{IB})$, $u^2_k(\text{IH})$.

Учитывая $u^2_{k,\,k+1} \le u^1_{k,\,k+1} \le u^2_{k+1} \le u^1_{k+1}$ получаем значения ожидаемых выигрышей

$$u^2_{k,m}(\text{I B}) = E(max\{X_m; u^2{}_{k,m+1}(\text{I B}); u^1{}_{k,m+1}\}) =$$

$$= \int_0^{u^2{}_{k,m+1}(\text{I B})} u^2{}_{k,m+1}(\text{I B})dF(x) + \int_{u^2{}_{k,m+1}(\text{I B})}^{u^1{}_{p,m+1}} x\ dF(x) +$$

$$+ \int_{u^1{}_{p,m+1}}^{\infty} u^1{}_{k,m+1}dF(x)$$

$$u^2_{k,m}(\text{I H}) = E(max\{X_m; u^2{}_{k,m+1}(\text{I H}); u^2{}_{k,m+1}(\text{I B})\}) =$$

$$= \int_0^{u^2{}_{k,m+1}(\text{I H})} u^2{}_{k,m+1}(\text{I H})dF(x) + \int_{u^2{}_{k,m+1}(\text{I H})}^{u^1{}_{m+1} - u^1_{m,m+1}} x\ dF(x) +$$

$$+ \int_{u^1{}_{m+1} - u^1_{m,m+1}}^{\infty} u^2{}_{k,m+1}(\text{I B})dF(x)$$

Выигрыши второго игрока при выборе первого заказчика вычисляются следующим образом

$$u^2_k(\text{I B}) = E(max\{X_k + u^2{}_{k,k+1}(\text{I B}); u^2{}_{k+1}(\text{I B}); u^1{}_{k+1}\}) =$$

$$= u^2{}_{k,k+1}(\text{I B}) + \int_0^{u^2{}_{k+1}(\text{I B}) - u^2{}_{k,k+1}(\text{I B})} [u^2{}_{k+1}(\text{I B}) - u^2{}_{k,k+1}(\text{I B})]dF(x) +$$

$$+ \int_{u^2{}_{k+1}(\text{I B}) - u^2{}_{k,k+1}(\text{I B})}^{u^1{}_{p,k+1}} x\ dF(x) + \int_{u^1{}_{p,k+1}}^{\infty} [u^1{}_{k+1} - u^2{}_{k,k+1}(\text{I B})]dF(x)$$

$$u^2_k(\text{I H}) = E(max\{X_k + u^2{}_{k,k+1}(\text{I H}); u^2{}_{k+1}(\text{I H}); u^2{}_{k+1}(\text{I H})\}) =$$

$$= u^2{}_{k,k+1}(\text{I H}) + \int_0^{u^2{}_{k+1}(\text{I H}) - u^2{}_{k,k+1}(\text{I H})} [u^2{}_{k+1}(\text{I H}) - u^2{}_{k,k+1}(\text{I H})]dF(x) +$$

$$+ \int_{u^2{}_{k+1}(\text{I H}) - u^2{}_{k,k+1}(\text{I H})}^{u^1{}_{k+1} - u^1_{k,k+1}} x\ dF(x) + \int_{u^1{}_{k+1} - u^1_{k,k+1}}^{\infty} [u^2{}_{k+1}(\text{I B}) - u^2{}_{k,k+1}(\text{I H})]dF(x)$$

Рассмотрим решение задачи для конкретного примера (см. табл. 5), учитывая данные по предложенным ценам.

Оптимальные стратегии продавцов выглядят следующим образом:

I продавец, учитывая свое доминирующее положение, действует так, как будто он один присутствует на рынке. Поэтому его выигрыши совпадают со случаем, рассмотренным в неигровой модели.

II-му продавцу необходимо оптимально действовать следующим образом.

На каждом шаге устанавливаются пороги для принятия претендента. По оптимальной стратегии первым принимается четвертый заказчик, так как его цена 450 больше ожидаемого выигрыша на пятом шаге (341.109), вторым принимается девятнадцатый заказчик, так как его цена 371.55 выше ожидаемого выигрыша (342.692). В результате он получает в сумме 821.55.

Результаты исследований показывают, что второй продавец в силу его вторичного положения получает возможность принимать заказчиков с не самыми высокими ценами, но при этих условиях, используя оптимальную стратегию, он получает максимальный для него выигрыш. В табл. 10 представлены результаты численного моделирования стратегий поведения игроков для рассмотренного примера.

Таблица 10

Значения порогов для $N = 32$ и $\lambda = 0.006$

k	$u^1_{k+1} - u^1_{k,k+1}$	$u^1_{q,k+1}$	u^2_{k+1}(I H) $- u^2_{k,k+1}$(I H)	$u^2_{p,k+1}$ (I H)	$u^2_{p,k+1}$ (I B)
1	472.395		356.768		
2	467.347		351.713		
3	462.138		346.497		
4	456.758		**341.109**		
5	451.196			383.552	
6	445.437			377.789	
7	439.469			371.815	
8	433.274			365.615	
9	**426.836**			359.169	
10		535.749			420.132
11		528.767			413.141
12		521.472			405.837
13		513.835			398.189
14		505.822			390.163
15		497.393			381.719
16		488.503			372.811
17		479.096			363.383
18		469.109			353.369
19		458.462			**342.692**
20		447.062			
21		**434.791**			

3. Заключение

В работе исследуются вопросы применимости задач наилучшего выбора к проблемам выбора наилучшего заказчика рекламных кампаний, предоставляемых поисковой системой Яндекс. Рассмотрены различные варианты математических моделей, описывающих ситуации, связанные с продажей баннеров и ключевых слов контекстной рекламы.

На основе реальных данных, предоставленных компанией Яндекс, было проведено численное моделирование оптимальных стратегий поведения для каждой из построенных математических моделей.

В работе даются практические рекомендации по осуществлению политики выбора заказчиков рекламных компаний.

5. Литература

[1] *Березовский Б. А., Гнедин А. В.* Задача наилучшего выбора. — М.: Наука, 1984. — 196 с.

[2] *Мазалов В. В., Домбровский Ю. А., Перин Н.* Теория оптимальной остановки: приложения к экологии поведения // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1, вып. 6. — С. 893—900.

[3] *Мазалов В. В., Фалько А. А.* Голосование в задаче наилучшего выбора с ранговым критерием // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13. № 4. — С. 577—588.

[4] *Николаев М. Л.* Оптимальные правила многократной остановки // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1998. Т. 5, вып. 2. — С. 309—348.

[5] *Николаев М. Л.* Об одном обобщении задачи наилучшего выбора // Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т. 22. № 1. — С. 191—194.

[6] *Николаев М. Л., Софронов Г. Ю., Полушина Т. В.* Задача последовательного выбора нескольких объектов с заданными рангами // Изв. Высш. учебных заведений (в печати).

[7] *Ano K.* On a partial information multiple selection problem // Game Theory and Application. 1998. Vol. 4.

[8] *Baston V., Garnaev A.* Competition for staff between two department // Game Theory and Applications. Vol. X / Ed. by L. Petrosjan, V. Mazalov. 2005. P. 13—26.

[9] *Ferguson T.* Selection by committee // Annals of the International Society of Dynamic Games. Vol. 7. Advances in Dynamic Games Application to Economics, Finance, Optimization and Stochastic Control. 2005. P. 203—209.

[10] *Garnaev A., Solovyev A.* On a two department multi stage game // International Workshop Optimal Stopping and Stochastic Control, aug. 22—26, 2005. Petrozavodsk. P. 24—37.

[11] *Mazalov V. V., Tamaki M.* An explicit formula for the optimal gain in the full-information problem of owning a relatively best object // Journal of Applied *Probability*. 2006. Vol. 43. No. 1. P. 87—101.

[12] *Mazalov V. V., Banin M. V.* N-person best-choice game with voting // Game Theory and Applications. 2003. Vol. 9. P. 45—53.

[13] *Sakaguchi M.* Optimal stopping games where players have weighted privilege // Annals of the International Society of Dynamic Games. Vol. 7. Advances in Dynamic Games Application to Economics, Finance, Optimization and Stochastic Control. 2005. P. 285—294.

[14] *Sakaguchi M., Mazalov V.* A non-zero-sum no-information best-choice game // Mathematical Methods of Operation Research. 2004. Vol. 60. P. 437—451.

[15] *Sofronov G., Keith J., Kroese D.* An optimal sequential procedure for a buying-selling problem with independent observations // J. Appl. Prob. 2006. Vol. 43. P. 454—462.

[16] *Suchwalko A., Szajowski K.* Non standard, no information secretary problems // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2002. P. 56.

[17] *Tamaki M.* Minimal expected ranks for the secretary problems with uncertain selection // Game Theory, Optimal Stopping, Probability and Statistics / Ed. Bruss F. T., Cam L. Le. Institute of Mathematical Statistics. 2000. P. 127—139.

Best-choice problem and applications in the advertising campaign of search system Yandex

V. V. Mazalov, A. A. Falko

The mathematical models of the best-choice problems are considered. These models are applied for the advertising campaign of search system Yandex. Practical advices for choice of customers are given based on numerical results. Following the optimal strategies search system can increase the expected profit.