

Вопросы для самоконтроля по курсу

**«Нелинейная динамика в приложении к биологическим
системам. Бифуркации и хаос»**

1. Почему отображение $\varphi(x) = \{10x\}$ переводит полуинтервал $[0, 1)$ в себя?
2. Привести для $\varphi(x) = \{10x\}$ пример 2-цикла.
3. Привести для $\varphi(x) = \{10x\}$ пример 3-цикла.
4. Привести для $\varphi(x) = \{10x\}$ пример 5-цикла.
5. В чем состоит отображение растяжения?
6. В чем состоит отображение склеивания?
7. Доказать: если считать x_0 случайной величиной, распределенной на интервале $[0, 1)$ с плотностью $p_0(x)$, то $p_1(x)$ – плотность распределения $x_1 = \varphi(x_0)$ – получается из $P_0(x)$ усреднением

$$p_1(x) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} p_0\left(10\left(x - \frac{i}{10}\right)\right).$$

8. Что называется инвариантом системы?
9. Что называется точкой покоя?
10. Что называется циклом?
11. Что называется k -периодической точкой?
12. Как искать точку покоя?
13. Как искать цикл?
14. Дать определение устойчивости точки покоя.
15. Дать определение асимптотической устойчивости точки покоя.
16. Дать определение экспоненциальной устойчивости точки покоя.
17. Критерий устойчивости точки покоя.
18. Критерий асимптотической устойчивости точки покоя.
19. Дать определение устойчивости цикла.
20. Дать определение асимптотической устойчивости цикла.
21. Дать определение экспоненциальной устойчивости цикла.
22. Критерий устойчивости цикла.
23. Критерий асимптотической устойчивости точки цикла.

24. Для критического случая, когда в точке покоя ξ выполняется равенство $|\varphi'(\xi)| = 1$, привести примеры устойчивости и неустойчивости.

25. Для системы $x_{t+1} = x_t^3 + 0.1$ доказать существование трех точек покоя

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3;$$

26. Найти непересекающиеся интервалы, содержащие эти точки покоя;

27. Доказать, что из этих трех точек только ξ_2 является устойчивой;

28. Найти максимальный инвариантный интервал, содержащий ξ_2 ;

29. Доказать, что, начиная с любой точки этого интервала, последовательность x_t стремится к ξ_2 .

30. Какие биологические факторы учитываются в простейшей популяционной динамической модели?

31. При каких условиях численность популяции монотонно убывает к нулю?

32. При каких условиях численность популяции не изменяется?

33. При каких условиях численность популяции монотонно возрастает к бесконечности?

34. Какие биологические факторы учитываются в линейной модели с притоком?

35. Какие биологические факторы учитываются в линейной модели с оттоком?

36. Какие биологические факторы учитываются в линейной модели с регулируемым оттоком?

37. В чем преимущество управления по принципу обратной связи?

38. Какие биологические факторы учитываются в нелинейной модели?

39. Какие особенности динамики возникают из-за нелинейности мо-

дели?

40. При каких условиях численность популяции в нелинейной модели монотонно убывает к нулю?

41. При каких условиях численность популяции в нелинейной модели стабилизируется?

42. При каких условиях численность популяции в нелинейной модели стремится к периодической?

43. Почему отрезок $[0, 1]$ есть инвариантное множество отображения $\varphi(x) = \mu x(1 - x)$?

44. С чем связано ограничение $0 \leq \mu \leq 4$?

45. Что такое бифуркация удвоения периода?

46. При каком значении параметра порядок сменяется хаосом?

47. В чем состоит закон универсальности?

48. Каков смысл констант Фейгенбаума?

49. Что такое самоподобие?

50. Что изображают на бифуркационной диаграмме?

51. Какие биологические факторы учитываются в одномерной линейной модели?

52. Какие параметры определяют типы динамики в одномерной линейной модели?

53. Какие биологические факторы учитываются в двумерной модели Лотке – Вольтерра?

54. При каких условиях в двумерной модели Лотке – Вольтерра численность популяций не изменяется?

55. При каких условиях в двумерной модели Лотке – Вольтерра численность популяций изменяется периодически?

56. Что моделирует гликолитический осциллятор Хиггинса?

57. Что называется точкой покоя непрерывной динамической системы?

58. Что называется циклом непрерывной динамической системы?
59. Как искать точку покоя непрерывной динамической системы?
60. Как искать цикл непрерывной динамической системы?
61. Дать определение устойчивости точки покоя непрерывной динамической системы.
62. Дать определение асимптотической устойчивости точки покоя непрерывной динамической системы.
63. Дать определение экспоненциальной устойчивости точки покоя непрерывной динамической системы.
64. Критерий устойчивости точки покоя непрерывной динамической системы.
65. Критерий асимптотической устойчивости точки покоя непрерывной динамической системы.
66. Дать определение устойчивости цикла непрерывной динамической системы.
67. Дать определение асимптотической устойчивости цикла непрерывной динамической системы.
68. Дать определение экспоненциальной устойчивости цикла непрерывной динамической системы.
69. Критерий устойчивости цикла непрерывной динамической системы.
70. Критерий асимптотической устойчивости точки цикла непрерывной динамической системы.
71. Каковы типы фазовых портретов?
72. От чего зависит тип фазового портрета?
73. Какой фазовый портрет у модели Лотке–Вольтерра?
74. Какой фазовый портрет у модели нейрона?
75. Какой фазовый портрет у брюсселятора?
76. Какие численные методы используются при построении фазо-

вых портретов?

77. В чем различие методов Эйлера, Эйлера с пересчетом, Коши и Рунге-Кутта?

78. Что называется мягкой бифуркацией Хопфа?

79. Каков механизм появления цикла в модели Хопфа?

80. Что называется жесткой бифуркацией Хопфа?

81. Каков механизм появления цикла в жесткой модели Хопфа?

82. Построить фазовые портреты линейного осциллятора.

83. Построить фазовые портреты брюсселятора.

84. Построить фазовые портреты гликолитического осциллятора Хиггинса.

85. Построить фазовые портреты уравнения Хайрера $\ddot{x} + x = \varepsilon \dot{x} - (\dot{x})^3$.

86. Построить фазовые портреты осциллятора Ван-дер-Поля (мягкий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 - x^2)\dot{x};$$

87. Построить фазовые портреты осциллятора Ван-дер-Поля (жесткий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 + ax^2 - bx^4)\dot{x}, \quad a = 5, \quad b = 0.5;$$

88. Построить фазовые портреты уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0;$$

89. Построить фазовые портреты модели «хищник – жертва» с ограниченностью ресурса

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \alpha y) - \gamma x^2 \\ \dot{y} = y(\beta x - 1) \end{cases};$$

90. Построить фазовые портреты модели «хищник – жертва» с насыщением хищника

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \gamma x) - \alpha \frac{x}{1+x} y \\ \dot{y} = -y + \beta \frac{x}{1+x} y \end{cases};$$

91. Построить фазовые портреты маятника с трением $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \sin x = 0$;

92. Как строится система первого приближения в окрестности равновесия?

93. Как строится система первого приближения в окрестности цикла?

94. Что такое мультипликатор?

95. Как вычисляется мультипликатор?

96. Как по мультипликатору определяется тип цикла?

97. Основные положения теории Флоке.

98. Что такое матрица монодромии?

99. Определение структурной устойчивости.

100. Бифуркации удвоения периода и переход к хаосу в трехмерных системах