УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

В. Ш. Шайдулин

Санкт-Петербургский государственный университет

Представлен еще один вид уравнений движения для возмущенной задачи двух тел, которые позволяют непосредственно рассчитывать изменение интегралов движения исходной задачи. В качестве интегралов рассматриваются момент импульса и вектор Лапласа — Рунге — Ленца. Такой выбор удобен для дальнейшего расчета метрик расстояния между орбитами при исследовании орбитальной эволюции семейств тел общего происхождения, например метеорных потоков. Удалось показать, что в сопутствующей радиальной системе отсчета правые части получаемых уравнений компактны и удобны для вычислений.

THE MOTION EQUATIONS FOR THE PERTURBED TWO—BODY PROBLEM

V. Sh. Shaidulin

Saint Petersburg State University

Another form of the motion equations for the perturbed two–body problem is presented, which allow one to directly calculate the change in the integrals of motion of the original problem. As integrals, the angular momentum and the Laplace—Runge—Lenz vector are considered. This choice is convenient for further calculation of distance metrics between orbits when studying the orbital evolution of families of bodies of common origin, for example, meteor streams. It was possible to show that in the radial proper reference frame, the right–hand sides of the resulting equations are compact and convenient for calculations.

Введение

Исследование орбитальной эволюции группы тел общего происхождения, речь в первую очередь о метеорных потоках, часто требует количественной оценки некой меры близости орбит. Интересно выявить особенности изменения со временем данной меры близости, чтобы подтвердить или опровергнуть наши общие представления об эволюции и времени существования метеорных потоков. А может оказаться, что мера близости позволит определить момент в прошлом, когда образовался какой-либо из наблюдаемых ныне метеорных потоков.

В формулировке и определении такой меры близости могут помочь метрики Холшевникова, заданные в пространстве кеплеровых орбит. Данные метрики могут вычисляться через элементы орбит для какой-либо пары тел или непосредственно через интегралы движения, с помощью которых метрики определяются [1]. Речь об интеграле площадей и векторе Лапласа — Рунге — Ленца. Потому для большей эффективности хочется интегрировать уравнения движения в подходящих элементах при исследовании орбитальной эволюции потока. Для кеплеровых элементов можно использовать уравнения Эйлера или Лагранжа [2], а в данной работе представлены уравнения для интеграла площадей $\mathbf{u}$ и вектора Лапласа — Рунге — Ленца $\mathbf{v}$ с той нормировкой, что используется в статье [1].

Интегралы движения

Уравнения движения для возмущенной задачи двух тел в обычных декартовых координатах имеют вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\varkappa^2}{r^3}\,\mathbf{r} + \mathbf{F}, \tag{1}$$

где $\mathbf{F}$ — равнодействующая возмущающих сил. В невозмущенном случае существуют интегралы движения:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}}{\varkappa} \qquad \text{— интеграл площадей,}$$

$$\mathbf{v} = u\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{u}}{\varkappa} - \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad \text{— вектор Лапласа — Рунге — Ленца.} \tag{2}$$

Формально два вектора представляют шесть интегралов, но независимых только пять. Существует связь, которой должны удовлетворять все кеплеровы орбиты:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, для векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ выбрана нестандартная нормировка, повторяющая определение из статьи [1].

В возмущенном случае вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ будут меняться, отражая изменение размеров, формы и ориентации плоскости орбиты под действием возмущающих сил. Построим дифференциальные уравнения для данных векторов, чтобы напрямую отслеживать их эволюцию.

Прежде определим две системы отсчета, для координатного представления всех векторов, которые нам понадобятся. Первая, орбитальная, задается тройкой базисных векторов:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{u}\,, \qquad \mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{v}\,, \qquad \mathbf{e}_w = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{uv} = \mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v.$$

И связана она с нашими интегралами движения. Вторая система отсчета, сопутствующая, радиальная, задается следующей тройкой:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{u}\,, \qquad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}\,, \qquad \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{r}}{ur} = \mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_r.$$

Она сопровождает тело на орбите. Две системы отсчета связаны в любой момент времени следующим образом:

$$\mathbf{e}_r = \alpha\mathbf{e}_v + \beta\mathbf{e}_w, \qquad \mathbf{e}_v = \alpha\mathbf{e}_r - \beta\mathbf{e}_\theta,$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\beta\mathbf{e}_v + \alpha\mathbf{e}_w, \qquad \mathbf{e}_w = \beta\mathbf{e}_r + \alpha\mathbf{e}_\theta.$$

Здесь α, β определяются истинной аномалией θ

$$\alpha = \cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{rv} = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_v, \qquad \beta = \sin\theta = \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{u}}{rvu} = -\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_v \tag{4}$$

и, естественно, они удовлетворяют связи

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{5}$$

По известным $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, α и β можно получить в обратную сторону координаты $\mathbf{r}$ и скорости $\dot{\mathbf{r}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = r(\alpha\mathbf{e}_v + \beta\mathbf{e}_w),\\
&\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = \frac{\varkappa v\beta}{u^2}(\alpha\mathbf{e}_v + \beta\mathbf{e}_w) + \frac{\varkappa u}{r}(\alpha\mathbf{e}_w - \beta\mathbf{e}_v),\\
&r = \frac{u^3}{u + v\alpha}\,, \qquad \dot{r} = \frac{\varkappa v\beta}{u^2}\,, \qquad \dot{\theta} = \frac{\varkappa u}{r^2}\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Подстановкой формул (6) в (2) можно убедиться в их справедливости, если учесть, что

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_u, \qquad \mathbf{v} = v\mathbf{e}_v, \qquad \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v\times\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\theta.$$

Уравнения движения

Будем теперь рассматривать вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — как оскулирующие элементы орбиты, α, β как параметры, определяющие положение на орбите, и получим уравнения движения продифференцировав (2) и (4) по времени:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}} &= \frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\varkappa}, \\
\dot{\mathbf{v}} &= \frac{\dot{u}\mathbf{v}}{u} + u\left(\frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{u} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{u}}}{\varkappa} - \dot{\mathbf{e}}_r\right), \\
\dot{\alpha} &= \frac{d(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_v)}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{e}}_v, \\
\dot{\beta} &= -\frac{d(\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_v)}{dt} = -\dot{\mathbf{e}}_\theta \cdot \mathbf{e}_v - \mathbf{e}_\theta \cdot \dot{\mathbf{e}}_v.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Подстановка (1) и (6) в (7) позволяет записать уравнения движения в оскулирующих элементах и выразить правые части в одной из систем отсчета, введенных ранее. Оказывается, что радиальная сопутствующая система отсчета удобнее для записи полученных уравнений. Возмущающая сила $\mathbf{F}$ далее будет представляться своими компонентами F_r, F_θ, F_u.

Уравнение для вектора $\mathbf{u}$ получается следующим:

$$
\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{F}}{\varkappa} = \frac{r}{\varkappa}(-F_u \mathbf{e}_\theta + F_\theta \mathbf{e}_u), \tag{8}
$$

Если учтем, что

$$
\dot{u} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_u = \frac{rF_\theta}{\varkappa}, \qquad \mathbf{v} = v\alpha\mathbf{e}_r - v\beta\mathbf{e}_\theta, \qquad \dot{\mathbf{e}}_r = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} = \frac{\varkappa u}{r^2}\mathbf{e}_\theta, \tag{9}
$$

то получим следующее уравнение для вектора $\mathbf{v}$:

$$
\dot{\mathbf{v}} = \frac{F_\theta(3u^2 - r)}{\varkappa}\mathbf{e}_r - \frac{2F_\theta\beta r v + F_r u^3}{\varkappa u}\mathbf{e}_\theta - \frac{F_u \beta r v}{\varkappa u}\mathbf{e}_u. \tag{10}
$$

Для вывода окончательного вида уравнений для переменных α, β, определяющих положение тела на орбите, нужно найти в добавок к (9) производные базисных векторов $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_v$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_u &= \frac{\dot{\mathbf{u}}}{u} - \frac{\dot{u}\mathbf{u}}{u^2} = -\frac{F_u r}{\varkappa u}\mathbf{e}_\theta, \\
\dot{\mathbf{e}}_\theta &= \dot{\mathbf{e}}_u \times \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_u \times \dot{\mathbf{e}}_r = -\frac{\varkappa u}{r^2}\mathbf{e}_r + \frac{F_u r}{\varkappa u}\mathbf{e}_u, \\
\dot{\mathbf{e}}_v &= \frac{\dot{\mathbf{v}}}{v} - \frac{\dot{v}\mathbf{v}}{v^2} = \frac{(2F_\theta\beta - F_r\alpha)u^3 - F_\theta\alpha\beta r v}{\varkappa u v}\mathbf{e}_w - \frac{F_u \beta r}{\varkappa u}\mathbf{e}_u.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Нужные нам уравнения получаются при подстановке (9) и (11) в (7):

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -\beta\left(\frac{\varkappa u}{r^2} - \frac{(2F_\theta\beta - F_r\alpha)u^3 - F_\theta\alpha\beta r v}{\varkappa u v}\right), \\
\dot{\beta} &= \alpha\left(\frac{\varkappa u}{r^2} - \frac{(2F_\theta\beta - F_r\alpha)u^3 - F_\theta\alpha\beta r v}{\varkappa u v}\right).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Итоговая система уравнений движения получается при объединении (8), (10) и (12), в которых r — это функция u, v и α из (6). Данная система должна решаться с учетом связей (3) и (5).

Можно заметить, что слагаемые в правых частях уравнений (12), связанные с возмущающей силой $\mathbf{F}$, становятся неопределенными для круговых орбит, потому что $\mathbf{v} = 0$. Это связано с тем, что начало отсчета истинной аномалии, не определено на круговых орбитах, отсутствует перицентр. Под действием возмущающей силы круговая орбита будет переходить в эллиптическую, для которой перицентр уже определен, но предугадать заранее его положение невозможно. Так что полученные уравнения не пригодны для изначально круговой орбиты и могут быть трудны в использовании в случае близкой к круговой орбите.

Заключение

Полученные уравнения движения в оскулирующих элементах напоминают по своей сути уравнения Эйлера и Лагранжа для оскулирующих кеплеровых элементов [2]. Их использование представляется удобным при исследовании орбитальной эволюции метеорных потоков и эволюции их метрических характеристик. Орбиты наблюдавшихся частиц известных метеорных потоков обладают большим эксцентриситетом, потому применение уравнений движения в представленной форме не должно вызывать затруднений. Возможность применения данных уравнений в других задачах небесной механики сохраняется, автор планирует модифицировать уравнения, чтобы круговые орбиты и близкие к ним не вызывали неудобств.

Библиографические ссылки

[1] *Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2016. — Vol. 462, iss. 2. — P. 2275—2283.

[2] *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. — М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 800 с.