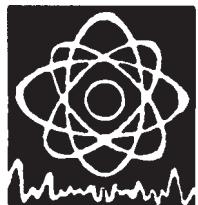


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
(нелинейные уравнения,
системы линейных уравнений,
интерполирование)**

Методические указания по курсу
«Численные методы и математическое
моделирование» для студентов
2 курса физического факультета



Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2004

Методические указания подготовлены
кафедрой компьютерной физики

Утверждено
учебно-методической комиссией
физического факультета
22 октября 2003 г.

Составители В. А. Чернышев,
А. Ю. Захаров

В методических указаниях рассматриваются методы численного решения нелинейных уравнений, систем линейных уравнений, интерполяции. Решение систем уравнений проводится итерационными и прямыми методами. Рассматривается вычисление определителя методом Гаусса. Приведены краткие теоретические сведения, необходимые для правильного применения рассматриваемых методов. При этом подробно разбирается ряд задач, предлагаемых студентам 2-го курса физического факультета на практических занятиях по курсу «Численные методы и математическое моделирование».

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нелинейное уравнение

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

не всегда может быть решено точно, т. е. не всегда можно записать корни уравнения в виде формулы. В связи с этим существует ряд методов приближенного вычисления корней нелинейного уравнения.

К нелинейным уравнениям относятся алгебраические и трансцендентные уравнения. Уравнение (1) называется *алгебраическим*, если функция $f(x)$ есть полином n -й степени:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

В качестве примера *трансцендентных* уравнений можно привести уравнения

$$5e^x - 7x^2 + 15 = 0; \quad x + \lg x - 0,5 = 0; \quad x - \operatorname{tg} x = 0.$$

Эти уравнения содержат тригонометрические, показательные, логарифмические и другие функции.

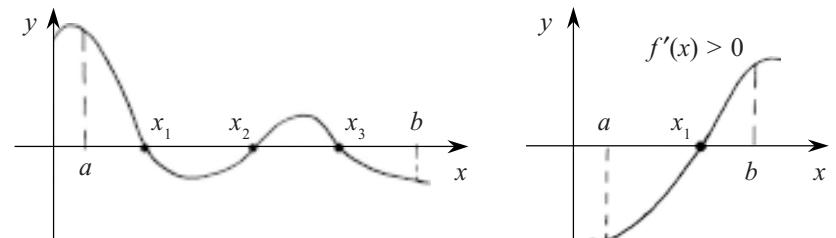
Рассмотрим ряд методов приближенного вычисления действительных корней алгебраического или трансцендентного уравнения $f(x) = 0$. Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Для того чтобы определить, содержит ли отрезок $[a; b]$ корни уравнения, т. е. такие точки, в которых функция $f(x) = 0$, воспользуемся следующей теоремой:

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то внутри отрезка содержится по крайней мере одна точка, в которой функция обращается в нуль (рис. 1).

Если при этом $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ первую производную, не меняющую знака в интервале $(a; b)$, то корень единственный (рис. 2).



Итак, если $f(a)f(b) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a; b]$ один или несколько корней. Нам необходимо определить интервалы на этом отрезке, содержащие только один корень (или убедиться, что на отрезке $[a; b]$ имеется только один корень). Этот процесс называется *отделением корней*. Корни могут быть отделены аналитически или графически. Рассмотрим один из методов *аналитического отделения корней*. Определим знаки функции $f(x)$ в промежуточных точках $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ отрезка $[a; b]$, точки x_i будем выбирать так, чтобы в двух соседних точках функция $f(x)$ имела разный знак. Если для какой-то пары точек x_i и x_{i+1} выполняется $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$, то отрезок $[x_i; x_{i+1}]$ содержит хотя бы один корень уравнения.

Пример 1. Отделить корни уравнения $5^x - 6x - 3 = 0$.

Решение. Обозначим $f(x) = 5^x - 6x - 3$. Найдем производную $f'(x) = 5^x \ln 5 - 6$. Вычислим корень производной:

$$5^x \ln 5 - 6 = 0; \quad 5^x = \frac{6}{\ln 5}; \quad x \ln 5 = \lg 6 - \lg(\ln 5);$$

$$x = \frac{\lg 6 - \lg(\ln 5)}{\lg 5} \approx 0,82.$$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным:
а) критическим значениям функции (корням производной) или близким к ним значениям; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	+	-	+

Поскольку происходят две перемены знака функции, то уравнение должно иметь два действительных корня. Поэтому определим знак функции еще в нескольких точках вблизи $x = 1$:

x	-1	0	1	2
$\text{sign } f(x)$	+	-	-	+

Отсюда видно, что корни уравнения принадлежат отрезкам $x_1 \in [-1; 0]$ и $x_2 \in [1; 2]$.

Теперь рассмотрим *графический* способ отделения корней. Преобразуем уравнение $f(x) = 0$ к виду

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x). \quad (3)$$

Построив графики функций $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$ определим абсциссы точек пересечения этих графиков, которые являются корнями уравнения (3), а следовательно, корнями уравнения (2).

Пример 2. Отделить корни уравнения $3 \sin(x + 1) - 2x = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sin x = \frac{2}{3}x - 1,$$

затем построим графики синусоиды $y_1 = \sin x$ и прямой $y_2 = \frac{2}{3}x - 1$ (рис. 3).

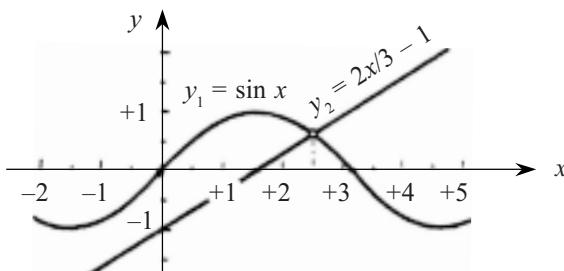


Рис. 3

Точка пересечения этих графиков дает приближенное значение корня $x \approx 2,5$.

Корни уравнения $f(x) = 0$ можно приближенно определить построив график функции $f(x)$. Однако построить этот график может быть достаточно сложно.

Когда корни уравнения отделены, для каждого корня x^* (будем обозначать x^* точное значение корня, $f(x^*) = 0$) установлен интервал $(a; b)$, в котором этот корень находится:

$$a < x^* < b.$$

Теперь необходимо найти приближенное значение ξ корня x^* с точностью ε , т. е. найти такое число, что

$$|x^* - \xi| < \varepsilon.$$

Методы, которые позволяют это сделать, называются *методами уточнения корня*. Мы рассмотрим несколько таких методов, которые отличаются ограничениями, налагаемыми на функцию $f(x)$, и количеством вычислений.

1. Метод деления отрезка пополам (бисекции)

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a; b]$ единственный корень, причем функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке.

Алгоритм метода состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам, т. е. найдем точку $c = (a + b)/2$. Вычислим $f(c)$.

Шаг 2. Если $f(a)f(c) > 0$ (отрезок $[a; c]$ не содержит корня), то положим $a = c$.

Если $f(a)f(c) < 0$, (отрезок $[a; c]$ содержит корень), то положим $b = c$.

Шаг 3. Если теперь $b - a \geq \varepsilon$, то перейдем к шагу 1.

При каждом выполнении шагов 1–3 длина отрезка $[a; b]$ уменьшается в два раза. Шаги 1–3 повторяются до тех пор, пока длина отрезка $[a; b]$ не будет меньше ε . Когда это будет достигнуто, в качестве приближенного значения корня берется середина отрезка: $c = (a + b)/2$. Последовательное выполнение шагов 1–3 представляет собой одну *итерацию* алгоритма (от лат. *iteratio* – повторение). Оценим количество итераций, необходимое для вычисления корня с заданной точностью. Поскольку на каждой итерации дли-

на отрезка уменьшается вдвое, то после выполнения k итераций длина отрезка будет равна

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

Итерации будут прекращены, если $b_k - a_k < \varepsilon$, т. е. k находится из неравенства

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon.$$

Пример 3. Найти корни уравнения

$$f(x) = \exp(-x) - \sin(x) = 0, x \in [0; 1], \varepsilon = 10^{-5}.$$

Решение. Найдем число итераций, необходимое для достижения требуемой точности:

$$\frac{1-0}{2^k} < 10^{-5}, \quad k \geq 17.$$

Будем проводить вычисления:

Шаг 1. Имеем $a = 0$, $b = 1$. Найдем точку $c = (0 + 1)/2 = 0,5$.

Вычислим $f(0,5) = 0,127$.

Шаг 2. Поскольку $f(0)f(0,5) > 0$, то положим $a = c = 0,5$.

Шаг 3. Поскольку $1 - 0,5 \geq 10^{-5}$, то перейдем к шагу 1.

Результаты первой и последующих итераций приведем в таблице:

k	x_k	$b_k - a_k$	$ f(x_k) $
1	0,5	0,5	0,127
2	0,75	0,25	0,209
3	0,625	0,125	0,0498
...
17	0,58854	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$8,85 \cdot 10^{-6}$

Поскольку $|a_{17} - b_{17}| < 10^{-5}$, приближенным значением корня с точностью 10^{-5} будем считать $x_{17} = 0,58854$.

Ответ: $x \approx 0,58854$.

Существует ряд методов уточнения корня уравнения, суть которых состоит в том, что с помощью какой-либо итерационной процедуры последовательно определяются приближения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, которые сходятся к точному значению корня x^* , т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Если итерационная процедура обеспечивает монотонную сходимость, то приближением корня с точностью ε можно считать первое приближение x_i , для которого выполняется $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$.

Мы рассмотрим три таких метода – метод хорд, метод Ньютона (метод касательных) и метод итераций.

2. Метод хорд

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a; b]$ единственный корень, $f(a)f(b) < 0$, функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют свой знак на $[a; b]$.

Положим для определенности $f(a) < 0$ (рис. 4).

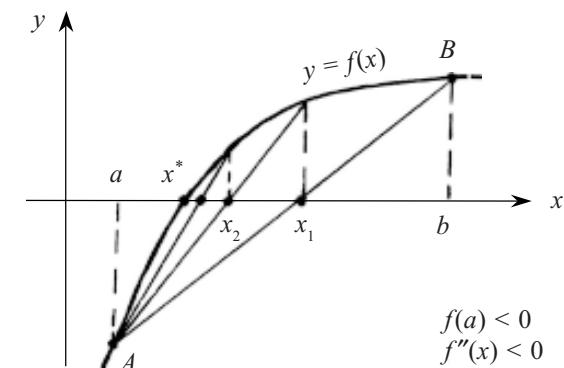


Рис. 4

Проведем прямую через точки A и B , координаты которых $[a, f(a)]$ и $[b, f(b)]$. Пересечение этой прямой с осью абсцисс будем считать приближением корня x_1 . Таким образом, мы заменили кривую ее хордой. В точке пересечения хорды с осью абсцисс (точка x_1) найдем значение функции $f(x_1)$ и проведем новую хорду через точки A и $[x_1, f(x_1)]$. Найдем приближение корня x_2 и т. д.

Уравнением хорды, проходящей через точки $A [a, f(a)]$ и $B [b, f(b)]$ является уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

При пересечении хорды с осью абсцисс $y = 0$, $x = x_1$, поэтому

$$\frac{x_1-a}{b-a} = \frac{-f(a)}{f(b)-f(a)},$$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \quad (4)$$

Если $f(x_1) > 0$ (см. рис. 4), то положив $b = x_1$, по формуле (4) найдем x_2 :

$$x_2 = a - \frac{f(a)}{f(x_1)-f(a)}(x_1-a).$$

Если кривая $f(x)$ выпукла вверх на $[a; b]$ (т. е. $f''(x) < 0$ на $[a; b]$), то она лежит выше своей хорды, поэтому точке пересечения хорды с осью абсцисс всегда будет соответствовать значение функции $f(x) > 0$. Следовательно, любое приближение x_k корня x^* можно найти, заменяя в формуле (4) b на найденное на предыдущем шаге приближение корня:

$$x_{k+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_k)-f(a)}(x_k-a). \quad (5)$$

Последовательные приближения $x_0 = b, x_1, x_2, \dots, x_m$ образуют монотонно убывающую последовательность, сходящуюся к корню x^* .

Если $f(x_1) < 0$ (рис. 5), то положив в формуле (4) $a = x_1$ найдем x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}(b-x_1).$$

Здесь кривая $f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a; b]$ ($f''(x) > 0$), она лежит ниже своей хорды, и значение функции $f(x)$ в точке пересечения хорды с осью абсцисс всегда будет отрицательно. Поэтому

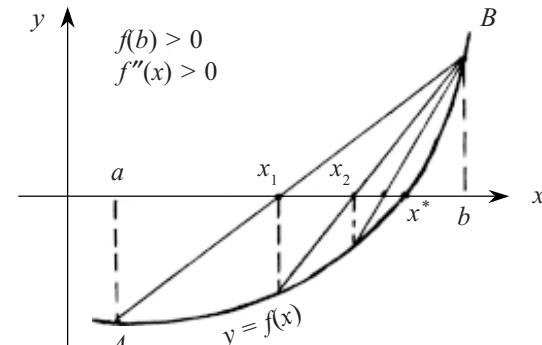


Рис. 5

любое приближение x_k корня x^* можно найти заменяя в формуле (4) a на найденное на предыдущем шаге приближение корня:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b)-f(x_k)}(b-x_k). \quad (6)$$

Последовательные приближения $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m$ образуют монотонно возрастающую последовательность, сходящуюся к корню x^* .

Поскольку в обоих случаях приближения сходятся к корню монотонно, то приближением корня с точностью ε можно считать первое приближение x_k , для которого выполняется $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Основные выводы

Приближение корня следует искать по формуле (5), если $f(a)f''(x) > 0$. При этом $x_0 = b$.

Если $f(a)f''(x) < 0$, приближение находится по формуле (6). При этом $x_0 = a$.

Приближение x_k имеет точность ε , если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Пример 4. Отделить корни уравнения $x^2 = \operatorname{tg}(0,93 \cdot x + 0,43)$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,0001.

Решение. Отделим корни уравнения графически, для чего построим графики функций $y = x^2$ и $y = \operatorname{tg}(0,93 \cdot x + 0,43)$ (рис. 6).

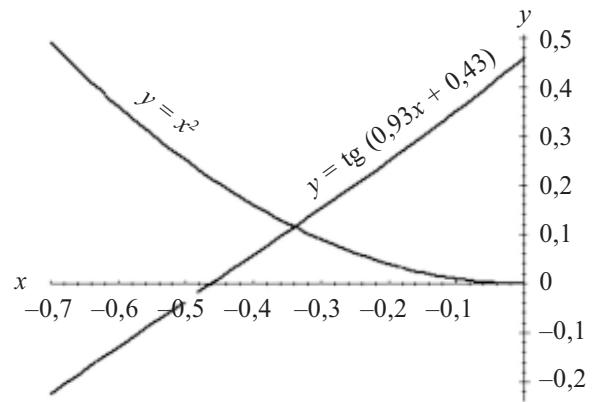


Рис. 6

Таким образом, искомый корень уравнения находится на отрезке $[-0,4; -0,2]$, т. е. $a = -0,4$ и $b = -0,2$. Определим знак функции $f(x) = \operatorname{tg}(0,93 \cdot x + 0,43) - x^2$ на концах отрезка и знак второй ее производной на этом отрезке:

$$f(a) = -0,102, f(b) = 0,208,$$

$$f'(x) = \frac{0,93}{\cos^2(0,93 \cdot x + 0,43)} - 2x,$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \cdot 0,93 \cdot \sin(0,93 \cdot x + 0,43) \cdot 0,93}{\cos^3(0,93 \cdot x + 0,43)} - 2 = \\ &= \frac{1,730 \cdot \sin(0,93 \cdot x + 0,43)}{\cos^3(0,93 \cdot x + 0,43)} - 2. \end{aligned}$$

$f''(x) < 0$ при $x \in [-0,4; -0,2]$ (это можно проверить графически). Поскольку $f(a)f''(x) > 0$, то воспользуемся формулой (5), возьмем $x_0 = b = -0,2$. Вычисления приведем в таблице.

n	x_n	$f(x_n)$
0	-0,2	0,21
1	-0,33443	0,0077
2	-0,33904	0,00026
3	-0,33919	$0,85 \cdot 10^{-5}$
4	-0,33919	$0,28 \cdot 10^{-6}$

Поскольку $|x_4 - x_3| < 0,0001$, то примем $x \approx -0,3392$. Т. е. мы нашли корень уравнения с точностью 0,0001 за четыре шага.

Ответ: $x \approx -0,3392$.

3. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a; b]$ единственный корень, $f(a)f(b) < 0$, функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке, ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют свой знак на $[a; b]$.

Пусть есть некое приближение x_0 к корню x^* , принадлежащее отрезку $[a; b]$. График функции $f(x)$ заменяется его касательной, проведенной в точке $[x_0, f(x_0)]$. Точка пересечения этой касательной с осью абсцисс принимается за новое приближение x_1 , проводится касательная к графику функции в точке $[x_1, f(x_1)]$ и т. д. Этот процесс показан на рис. 7, где взято $x_0 = b$.

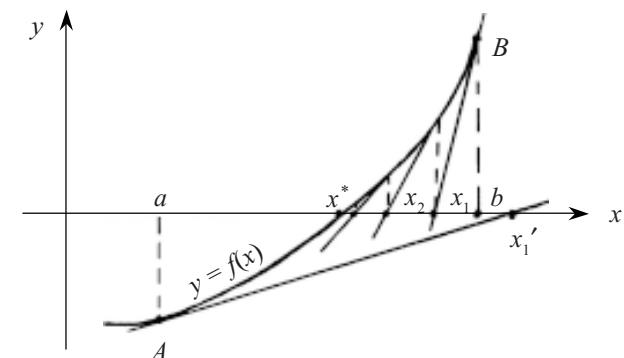


Рис. 7

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $[x_0, f(x_0)]$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

При пересечении касательной с осью абсцисс $y = 0$, $x = x_1$, поэтому

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Второе приближение корня, x_2 , найдем по формуле

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Для $k + 1$ -го приближения запишем

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (7)$$

Заметим, что здесь $x_0 = b$ было выбрано так, что $f(x_0) > 0, f''(x_0) > 0$, т. е. $f(x_0) f''(x_0) > 0$. Если начальное приближение x_0 выбрать так, что $f(x_0) f''(x_0) < 0$ (например, положить $x_0 = a$), то первое приближение может оказаться от корня дальше предыдущего (точка x_1' на рис. 7 оказалась за пределами отрезка $[a; b]$, где отделен корень).

Основные выводы

В методе Ньютона приближение корня с любой степенью точности можно найти по формуле (7), если в качестве начального приближения x_0 взят тот конец отрезка $[a; b]$, на котором знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$.

Последовательность приближений $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ при правильном выборе начального приближения монотонно сходится к корню x^* . Поэтому можно считать, что корень найден с точностью ε , если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Пример 5. Решим уравнение, рассмотренное в примере 4, методом Ньютона.

Решение. Поскольку $f(a) f''(x) > 0$, то возьмем $x_0 = a = -0,4$. По формуле (7) найдем x_1 и т. д. Вычисления приведем в таблице:

n	x_n	$f(x_n)$
0	-0,4	-0,1
1	-0,34118	-0,0033
2	-0,33920	$-0,36 \cdot 10^{-5}$
3	-0,33920	0

Как видно из таблицы, мы нашли корень уравнения с точностью 0,0001 за три шага.

Ответ: $x \approx -0,3392$.

Заметим, что корень мы нашли быстрее, чем методом хорд. Метод Ньютона позволяет получить корень с заданной точностью за меньшее количество шагов, чем метод хорд, однако он не определен, если $f'(x) = 0$.

4. Метод итераций (метод последовательных приближений)

Познакомимся еще с одним численным методом решения уравнений. Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a; b]$. Предположим, что уравнение $f(x) = 0$ можно записать в виде

$$x = \varphi(x). \quad (8)$$

Возьмем произвольное значение x_0 из области определения функции $\varphi(x)$ и будем строить последовательность чисел $\{x_n\}$ с помощью формулы

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots. \quad (9)$$

Ответим на вопрос, при каких ограничениях на функцию $\varphi(x)$ последовательность (9) сходится к корню уравнения (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \quad x^* = \varphi(x^*),$$

который является корнем уравнения $f(x) = 0$. Для этого введем новое понятие.

Говорят, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ условию Липшица, если существует такая постоянная α , что для любых x_1 и x_2 , принадлежащих отрезку $[a; b]$, имеет место неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|. \quad (10)$$

Величину α называют постоянной Липшица.

Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ условию Липшица с постоянной $\alpha < 1$, тогда при выборе в качестве x_0 любой точки отрезка $[a; b]$ последовательность (9) сходится к корню x^* .

Покажем это. Возьмем точку x_0 , принадлежащую отрезку $[a; b]$, вычислим $x_1 : x_1 = \varphi(x_0)$. Расстояние от точки x_1 до корня x^* оценим с помощью условия Липшица:

$$|x_1 - x^*| = |\varphi(x_0) - \varphi(x^*)| \leq \alpha |x_0 - x^*|,$$

т. е.

$$|x_1 - x^*| \leq \alpha |x_0 - x^*|.$$

Поскольку $\alpha < 1$, то мы приблизились к корню. Таким образом, каждое последующее приближение корня x_{n+1} будет лежать к корню ближе, чем предыдущее x_n .

Выясним, о чём говорит условие Липшица. Перепишем его (10) в виде

$$\frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \alpha. \quad (11)$$

Полученное неравенство ограничивает тангенс угла наклона секущей графика $\varphi(x)$ (рис. 8), проведенной через точки $[x_1, \varphi(x_1)]$ и $[x_2, \varphi(x_2)]$.

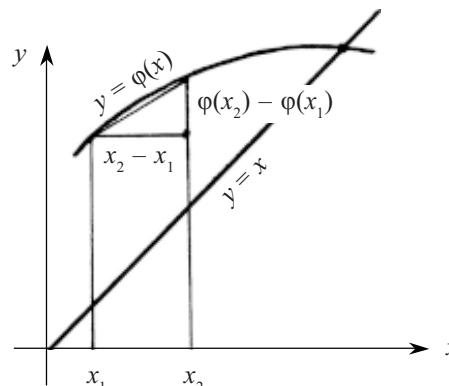


Рис. 8

Поскольку условие (11) выполняется для любой пары точек отрезка $[a; b]$, оно ограничивает тангенс угла наклона любой секущей графика $\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$. А поскольку каждой секущей можно поставить в соответствие параллельную ей касательную, то можно считать, что функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ ограниченную производную:

$$|\varphi'(x)| \leq \alpha. \quad (12)$$

Напомним, что последовательность (9) сходится к корню, если $\alpha < 1$.

Пример 6. Найти корень уравнения $x - \cos x = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с точностью 0,1.

Решение. $f(x) = x - \cos x = 0$. Перепишем уравнение в виде

$$x = \cos x.$$

Здесь $\varphi(x) = \cos x$.

Для ответа на вопрос, удовлетворяет ли функция $\varphi(x)$ на отрезке $[0; 1]$ условию Липшица, проверим, удовлетворяет ли она на этом отрезке условию (12):

$$|\varphi'(x)| = |\sin x| \leq 1.$$

Поэтому функция $\varphi(x) = \cos x$ удовлетворяет на отрезке $[0; 1]$ условию Липшица с постоянной $\alpha = \sin 1 < 1$. За начальное приближение возьмем середину отрезка, $x_0 = 0,5$, вычисления будем проводить по формуле (9), результаты вычислений поместим в таблицу.

Поскольку $|x_5 - x_4| = 0,073 < 0,1$, то мы нашли корень с точностью 0,1 за пять шагов.

Заметим, что чем меньше постоянная Липшица α , тем быстрее мы приближаемся к корню. Если $\alpha = 1/2$, то на каждом шаге мы приближаемся к корню так же, как и в методе деления отрезка пополам.

Ответ: $x \approx 0,77$.

n	x_n
0	0,500
1	0,878
2	0,639
3	0,803
4	0,695
5	0,768

Выбрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы выполнялось условие (12), не всегда бывает легко. Один из способов определения функции $\varphi(x)$ следующий:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, \quad (13)$$

где $|k| > Q/2$. Здесь Q – максимальное значение модуля производной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$: $Q = \max_{[a; b]} |f'(x)|$. Знак k совпадает со знаком производной $f'(x)$ на $[a; b]$.

Можно показать, что при определении функции $\varphi(x)$ по формуле (13) уравнение $x = \varphi(x)$ эквивалентно уравнению $f(x) = 0$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (12).

Пример 7. Отделить корни уравнения $3x + \lg(2x + 1) = 2$ графически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,0001.

Решение. Отделим корни уравнения графически, для чего построим графики функций $y = 2 - 3x$ и $y = \lg(2x + 1)$ (рис. 9).

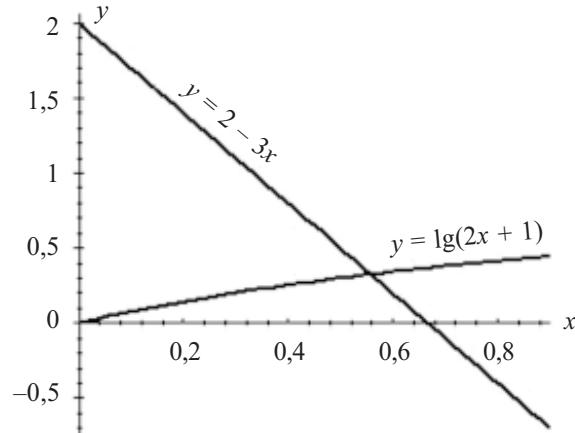


Рис. 9

Таким образом, искомый корень уравнения находится на отрезке $[0,4; 0,6]$, т. е. $a = 0,4$ и $b = 0,6$:

$$f(x) = 3x + \lg(2x + 1) - 2,$$

$$f'(x) = 3 + \frac{2}{(2x+1)\ln(10)},$$

$$Q = \max_{[0,4; 0,6]} |f'(x)| = f'(0,4) \approx 3,48.$$

$f'(x) > 0$ на отрезке $[0,4; 0,6]$. Возьмем $k = 3$, тогда $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{3} = \frac{2 - \lg(2x+1)}{3}$. За начальное приближение возьмем $x_0 = 0,4$, а все остальные приближения определим по формуле

$$x_{n+1} = \frac{2 - \lg(2x_n + 1)}{3}.$$

Результаты вычислений расположим в таблице.

Как видно из таблицы, мы нашли корень уравнения с точностью 0,0001 за пять итераций.

Ответ: $x \approx 0,5582$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0,4	-0,55
1	0,58158	0,080
2	0,05550	-0,011
3	0,55858	0,0015
4	0,55808	-0,00020
5	0,55815	0,000028

5. Заключительные замечания

Для того чтобы сравнить четыре метода, которые мы рассмотрели, введем определение:

Определение. Говорят, что данным методом достигается сходимость к корню x^* со скоростью r , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^r} = c. \quad (14)$$

Для метода деления отрезка пополам $r = 1$, $c = \frac{1}{2}$. Если $r = 1$, скорость сходимости называют линейной, если $r > 1$ – сверхлинейной, если $r = 2$ – квадратичной. Соотношение (14) характеризует, насколько быстро убывает ошибка при совершении очередной итерации, когда уже сделано достаточно много итераций.

Из рассмотренных методов метод хорд имеет линейную сходимость, метод Ньютона – квадратичную, скорость сходимости метода хорд зависит от постоянной Липшица. Метод Ньютона сходится быстрее, чем метод хорд и деления отрезка пополам, однако он накладывает сильные ограничения на функцию. А именно, требуется, чтобы производные $f'(x)$ и $f''(x)$ были непрерывны и сохраняли определенные знаки на отрезке $[a; b]$, где отделен корень. Такие же ограничения накладываются на функцию $f(x)$ в методе хорд. Все рассмотренные методы, кроме метода деления отрезка пополам, зависят от выбора начального приближения x_0 . В методе деления отрезка требуется только непрерывность функции $f(x)$ и отсутствует проблема выбора x_0 .

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Запишем систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

Совокупность коэффициентов этой системы можно записать в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей системы (1), а ее определитель $D = \det A$ – определителем системы (1).

Решением системы (1) называется такая упорядоченная совокупность чисел $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, которая обращает все уравнения системы в верные равенства.

Система линейных уравнений имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля: $D = \det A \neq 0$. Если определитель равен нулю, $D = \det A = 0$, то система либо не имеет решений, либо имеет их бесконечное множество.

Поясним сказанное геометрически. Пусть есть система уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2)$$

Каждое уравнение системы задает прямую на плоскости, координаты точки пересечения этих прямых являются решением системы

мы. Возможны три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости.

1. Прямые пересекаются. Это эквивалентно тому, что коэффициенты системы (2) непропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \quad (3)$$

2. Прямые параллельны, т. е. коэффициенты системы (2) подчиняются соотношениям

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}. \quad (4)$$

3. Прямые совпадают, т. е. коэффициенты системы (2) пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (5)$$

Определитель системы (2) имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

В том случае, когда выполняется условие (3), определитель D не равен нулю и система (2) имеет единственное решение. В случае отсутствия решения или при бесконечном множестве решений выполняются соотношения (4) и (5), из которых следует, что определитель $D = 0$.

Если определитель системы $D \approx 0$, прямые могут оказаться почти параллельными и координаты точки их пересечения будут весьма чувствительны к изменению коэффициентов системы (рис. 10).

Таким образом, малые погрешности исходных данных или вычислений могут привести к существенным погрешностям в решении. Такие системы уравнений называются *плохо обусловленными*. Условие $D \approx 0$ является необходимым для плохой обусловленности системы линейных уравнений, но не достаточным. Например, система из десяти уравнений с диагональной матрицей A , с элементами $a_{ii} = 0,01$ не является плохо обусловленной, хотя ее определитель $D = (0,01)^{10} = 10^{-20}$ мал.

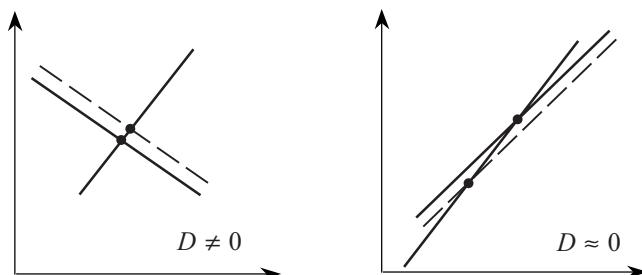


Рис. 10

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы – *прямые* и *итерационные*. Прямыми методами называются методы, дающие решение системы за конечное число арифметических действий. В этих методах решение выражается в виде формул через коэффициенты системы. Если отсутствуют ошибки округления, то получаемые решения являются точными. Итерационными методами называются методы, дающие последовательность приближений, которая сходится к точному решению системы. Каждое приближение вычисляется с использованием предыдущего приближения по единообразной схеме (итерационной формуле). Для осуществления итерационного процесса необходимо задать некоторое приближенное решение – *начальное приближение*.

К недостаткам прямых методов можно отнести то, что они требуют хранения в оперативной памяти компьютера сразу всей матрицы системы, а также накапливание погрешностей в процессе решения, поскольку они могут требовать большого количества вычислений. Это существенно для больших систем, а также для плохо обусловленных систем, чувствительных к погрешностям. Итерационные методы требуют хранения в памяти лишь нескольких предыдущих приближений решения системы (наборов чисел c_1, c_2, \dots, c_n). Кроме того, погрешности в итерационных методах не накапливаются, поскольку точность вычислений на каждой итерации зависит только от результатов предыдущей итерации. Поэтому итерационные методы особенно полезны в случае большого числа уравнений, а также плохо обусловленных систем. Итераци-

онные методы могут использоваться для уточнения решений, полученных с помощью прямых методов.

Из прямых методов мы рассмотрим метод исключения Гаусса, из итерационных – метод простой итерации и метод Зейделя.

1. Метод исключения Гаусса

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6)$$

Будем считать, что ее определитель отличен от нуля, т. е. она имеет единственное решение.

Метод исключений Гаусса основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Например, матрица A системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 35, \\ x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \quad (7)$$

имеет треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что решение системы (7) можно легко найти, если решить сначала последнее уравнение, затем предпоследнее и затем первое.

Треугольный вид матрицы системы в методе Гаусса достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы. Этот процесс называется *прямым ходом* в методе Гаусса, он продолжается до тех пор, пока в левой части последнего, n -го уравнения не останется один член с неизвестным x_n , т. е. матрица системы не будет приведена к треугольному виду. *Обратный ход*

метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных, начиная с последнего уравнения, которое содержит единственное неизвестное.

Будем решать систему (6) методом Гаусса. Прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$; прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на $-a_{31}/a_{11}$. Тем самым исключим x_1 из второго и третьего уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad i, j = 2, 3,$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \quad i = 2, 3.$$

Теперь из третьего уравнения (8) нужно исключить x_2 . Умножим второе уравнение системы (8) на $-a'_{32}/a'_{22}$ и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{23}, \quad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2.$$

Теперь матрица системы (9) имеет треугольный вид. На этом прямой ход метода Гаусса заканчивается.

Заметим, что в процессе исключения неизвестных приходится выполнять деление на коэффициенты a'_{11}, a'_{22} (и ряд других, если бы система имела более трех уравнений). Поэтому эти коэффициенты должны быть отличны от нуля. Если это не выполняется, необходимо переставить уравнения системы.

Обратный ход метода начинается с решения третьего уравнения системы (9):

$$x_3 = b''_3/a''_{33}.$$

Используя x_3 найдем x_2 из второго уравнения, а затем, используя x_3 и x_2 , найдем x_1 из первого:

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}(b'_2 - a'_{23}x_3), \quad x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

Аналогично строится вычислительный алгоритм для линейной системы с произвольным числом уравнений.

Одной из модификаций метода Гаусса является *схема с выбором главного элемента*. В этой схеме требование неравенства нулю элементов a_{ip} , на которые происходит деление в прямом ходе метода, заменяется на более жесткое: из всех оставшихся в i -м столбце элементов нужно выбрать наибольший по модулю и переставить уравнения так, чтобы этот элемент оказался на месте элемента a_{ii} . Диагональные элементы матрицы называются *ведущими элементами*. Выбирая максимальный ведущий элемент, мы уменьшаем множители, используемые при преобразовании уравнений, и тем самым снижаем погрешность вычислений. Однако этот метод дает ненадежные результаты для плохо обусловленных систем.

Пример 8. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases} \quad (10)$$

Решение. Умножим первое уравнение на $-a_{21}/a_{11} = -(-3)/10 = 0,3$ и прибавим ко второму. Первое уравнение, умноженное на $-a_{31}/a_{11} = -5/10 = -0,5$, прибавим к третьему. Получим

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ -0,1x_2 + 6x_3 = 6,1, \\ 2,5x_2 + 5x_3 = 2,5. \end{cases}$$

Прежде чем исключать x_2 из третьего уравнения, заметим, что коэффициент при x_2 во втором уравнении (т. е. ведущий элемент a_{22})

меньше, чем коэффициент при x_2 в третьем уравнении. Если бы мы действовали по схеме с выбором главного элемента, мы должны были бы поменять местами второе и третье уравнения. Продолжим исключение. Умножим второе уравнение на $-a'_{32}/a'_{22} = -2,5/(-0,1) = 25$ и прибавим к третьему:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ -0,1x_2 + 6x_3 = 6,1, \\ 155x_3 = 155. \end{array} \right.$$

На этом прямой ход метода Гаусса закончился. Обратный ход состоит в последовательном вычислении x_1, x_2, x_3 :

$$x_3 = \frac{155}{155} = 1, \quad x_2 = \frac{6x_3 - 6,1}{0,1} = -1, \quad x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0.$$

Итак, решение системы $(0, -1, 1)$. Заметим, что все вычисления мы проводили без округления результата, поэтому получили *точное* решение. Теперь слегка изменим коэффициенты системы, с тем чтобы решение *осталось прежним* (мы можем это проверить, подставив в систему только что найденное решение), но при вычислениях пришлось бы использовать округления:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ -3x_1 + 2,099x_2 + 6x_3 = 3,901, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6. \end{array} \right. \quad (11)$$

Будем решать эту систему. При вычислениях будем записывать числа с плавающей точкой, сохраняя пять разрядов числа. После первого шага исключения получим

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ -0,001x_2 + 6x_3 = 6,001, \\ 2,5x_2 + 5x_3 = 2,5. \end{array} \right. \quad (12)$$

Следующий шаг исключения проводим при малом ведущем элементе $a'_{22} = -0,001$. Чтобы исключить x_2 из третьего уравнения, мы должны умножить второе уравнение на 2500. При умножении 6,001 на 2500 получим 15002,5, которое при округлении до пяти

разрядов даст 15003. При прибавлении к этому числу 2,5 получим 15005,5, которое округляется до 15006. Третье уравнение будет иметь вид

$$15005x_3 = 15006.$$

Отсюда $x_3 = 1,0001$. Из второго и первого уравнений (12) найдем

$$x_2 = \frac{6,001 - 6 \cdot 1,0001}{-0,001} = -0,4, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-0,4)}{10} = 0,42.$$

Итак, вычисления проводились с округлением до пяти разрядов, по аналогии с процессом вычислений на компьютере. В результате получено решение $(0,42, -0,4, 1,0001)$ вместо точного решения $(0, -1, 1)$. Такая неточность связана с малой величиной ведущего элемента. Теперь проведем расчет по *схеме с выбором главного элемента*, т. е. перед исключением x_2 из третьего уравнения системы (12) переставим местами второе и третье уравнения, тогда ведущий элемент будет равен 2,5 вместо $-0,001$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7, \\ 2,5x_2 + 5x_3 = 2,5, \\ -0,001x_2 + 6x_3 = 6,001. \end{array} \right. \quad (13)$$

Теперь исключим x_2 из третьего уравнения, прибавив к нему второе, умноженное на 0,0004. Получим

$$6,002x_3 = 6,002.$$

Отсюда находим $x_3 = 1$. Из второго и первого уравнений (13) получим

$$x_2 = \frac{2,5 - 5 \cdot 1}{2,5} = -1, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1)}{10} = 0.$$

Итак, в результате перестановки уравнений, т. е. выбора максимального делителя, мы получили ответ $(0, -1, 1)$, что совпадает с точным решением $(0, -1, 1)$.

2. Метод итерации

Пусть есть система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (14)$$

Будем считать, что определитель этой системы отличен от нуля.

Предположим, что диагональные коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ не равны нулю, тогда из первого уравнения можно выразить x_1 через $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, из второго уравнения выразить x_2 через $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, и т. д. Таким образом, систему можно привести к виду

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ x_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \dots, \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{cases} \quad (15)$$

Теперь, определив из каких-то соображений нулевое приближение решения системы

$$x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}$$

(второй индекс у переменной x означает степень приближения), найдем первое приближение с помощью системы (15):

$$\begin{cases} x_{1,1} = \varphi_1(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}), \\ x_{2,1} = \varphi_2(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}), \\ x_{3,1} = \varphi_3(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}), \\ \dots, \\ x_{n,1} = \varphi_n(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}). \end{cases}$$

Определив первое приближение $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{n,1}$, найдем второе:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \varphi_1(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{n,1}), \\ x_{2,2} = \varphi_2(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{n,1}), \\ x_{3,2} = \varphi_3(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{n,1}), \\ \dots, \\ x_{n,2} = \varphi_n(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{n,1}) \end{cases}$$

и т. д. При некоторых условиях последовательность приближений

$$\begin{cases} x_{1,0}, & x_{2,0}, & x_{3,0}, & \dots, & x_{n,0}, \\ x_{1,1}, & x_{2,1}, & x_{3,1}, & \dots, & x_{n,1}, \\ x_{1,2}, & x_{2,2}, & x_{3,2}, & \dots, & x_{n,1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

сходится к решению системы (15), а значит и исходной системы (14).

Условие сходимости метода итерации

Процесс итераций сходится для любого начального приближения $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \dots, x_{n,0}$, если выполняется следующее условие: в матрице M , составленной из частных производных функций $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ по переменным $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

сумма модулей элементов каждой строки меньше единицы либо сумма модулей элементов каждого столбца меньше единицы.

Сформулированное условие является достаточным для сходимости метода, но не является необходимым, т. е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении этого условия. Это условие, налагаемое на функции $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, будет выпол-

нено, если для их получения воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Исходную систему уравнений привести к виду с преобладающими диагональными коэффициентами, т. е. к такому виду, чтобы в i -м уравнении системы коэффициент a_{ii} перед неизвестным x_i был по модулю больше, чем остальные коэффициенты перед другими неизвестными.

2. Разделить каждое уравнение на диагональный коэффициент a_{ii} и выразить x_i .

Итерации повторяют до тех пор, пока вновь найденный набор корней не будет отличаться от предыдущего в пределах заданной точности.

Пример 9. Привести систему уравнений

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41 & (\text{I}), \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44 & (\text{II}), \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56 & (\text{III}) \end{cases} \quad (17)$$

к виду, пригодному для итерационного процесса.

1. Диагональные члены матрицы системы должны быть по модулю больше, чем остальные члены в строке, т. е. в первом уравнении наибольший по модулю коэффициент должен стоять перед x_1 , во втором – перед x_2 , в третьем – перед x_3 . Поэтому первым уравнением возьмем уравнение (II), третьим – (I) а вторым – сумму уравнений (I) и (III):

$$\begin{cases} 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 6,26x_1 - 12,20x_2 - 3,24x_3 = 69,97, \\ 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41. \end{cases} \quad (18)$$

2. Разделим каждое уравнение на соответствующий диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное:

$$\begin{cases} x_1 = -0,649x_2 - 0,034x_3 - 0,801, \\ x_2 = 0,513x_1 - 0,266x_3 - 5,735, \\ x_3 = 0,202x_1 - 0,363x_2 - 1,241. \end{cases} \quad (19)$$

(Коэффициенты и свободные члены исходной системы (18) приведены с $l = 2$ десятичными знаками, результаты вычислений округляем до $l + 1 = 3$ десятичного знака.)

Матрица M для полученной системы (19) имеет вид

$$M = \begin{vmatrix} 0 & -0,649 & -0,034 \\ 0,513 & 0 & -0,266 \\ 0,202 & -0,363 & 0 \end{vmatrix}$$

для любого набора переменных x_1, x_2, x_3 , т. к. производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ постоянны. Сумма модулей элементов каждой строки матрицы меньше единицы, поэтому условие сходимости выполнено.

Пример 10. Методом итерации решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,05x_2 + 0,11x_3 - 0,08x_4 + 2,15, \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,16x_2 - 0,28x_3 - 0,06x_4 - 0,83, \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,15x_2 + 0,12x_4 + 1,16, \\ x_4 = -0,21x_1 + 0,13x_2 - 0,27x_3 + 0,44. \end{cases}$$

Уравнения системы имеют вид $x_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ являются константами. Запишем матрицу M :

$$M = \begin{vmatrix} 0,32 & -0,05 & 0,11 & -0,08 \\ 0,11 & 0,16 & -0,28 & -0,06 \\ 0,08 & -0,15 & 0,00 & 0,12 \\ -0,21 & 0,13 & -0,27 & 0,00 \end{vmatrix}.$$

Суммы модулей элементов каждой строки матрицы M равны 0,56, 0,61, 0,35, 0,61.

Как видим, условие сходимости выполняется. В качестве первого приближения $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}$ возьмем свободные коэффициенты исходной системы уравнений. Процесс итераций удобно привести в таблице:

n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	2,1500	-0,8300	1,1600	0,4400
1	2,9719	-1,0775	1,5093	-0,4326
2	3,3555	-1,0721	1,5075	-0,7317
3	3,5017	-1,0106	1,5015	-0,8111
4	3,5511	-0,9783	1,4944	-0,8321
5	3,5662	-0,9644	1,4910	-0,8364
6	3,5703	-0,9593	1,4896	-0,8368
7	3,5713	-0,9576	1,4891	-0,8367
8	3,5714	-0,9571	1,4889	-0,8365
9	3,5714	-0,9570	1,4889	-0,8364
10	3,5714	-0,9570	1,4889	-0,8364

Как видно из таблицы, мы нашли решение системы уравнения с точностью 0,0001 за десять итераций.

Ответ: $x_1 \approx 3,5714$, $x_2 \approx -0,9570$, $x_3 \approx 1,4889$, $x_4 \approx -0,8364$.

3. Метод итераций Зейделя

Метод итераций Зейделя аналогичен методу простых итераций, отличие его состоит в том, что при вычислении $i+1$ -го приближения переменной x_k используются уже вычисленные перед этим $i+1$ -е приближения переменных x_1, x_2, \dots, x_{k-1} . Таким образом, вычисления ведутся по формулам:

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = \varphi_1(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \dots, x_{n,i}), \\ x_{2,i+1} = \varphi_2(x_{1,i+1}, x_{2,i}, x_{3,i}, \dots, x_{n,i}), \\ x_{3,i+1} = \varphi_3(x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, x_{3,i}, \dots, x_{n,i}), \\ x_{4,i+1} = \varphi_4(x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, x_{3,k+1}, x_{4,k}, \dots, x_{n,k}), \\ \dots, \\ x_{n,i+1} = \varphi_n(x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, x_{3,i+1}, \dots, x_{n-1,i+1}, x_{n,i}). \end{cases}$$

При вычислении $x_{k,i+1}$ используются не $x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \dots, x_{n,i}$, как в методе простых итераций, а $x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, x_{3,i+1}, \dots, x_{k-1,i+1}, x_{k,i}, \dots, x_{n,i}$.

Достаточное условие сходимости метода простых итераций, приведенное выше, является достаточным и для сходимости метода Зейделя. Итерационный процесс продолжается до достижения малой разности между значениями неизвестных в двух последовательных итерациях.

Пример 11. Методом итераций Зейделя решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что решением данной системы является

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1.$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3), \\ x_2 = \frac{1}{6}(7 - 2x_1 + x_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2). \end{cases}$$

Таким образом, мы привели систему к виду (15). Производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ представляют собой коэффициенты перед неизвестными в правых частях уравнений, суммы их модулей для каждого уравнения меньше единицы. Стало быть, условие сходимости выполнено. В качестве начального приближения возьмем

$$x_{1,0} = 0, x_{2,0} = 0, x_{3,0} = 0.$$

Найдем новое приближение:

$$\begin{cases} x_{1,1} = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1, \\ x_{2,1} = \frac{1}{6}(7 - 2 \cdot 1 + 0) = \frac{5}{6}, \\ x_{3,1} = \frac{1}{3}\left(1 + 2 \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{8}{9}. \end{cases}$$

Аналогично вычислим следующее приближение:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{1}{4} \left(4 + \frac{5}{6} - \frac{8}{9} \right) = \frac{71}{72}, \\ x_{2,2} = \frac{1}{6} \left(7 - 2 \cdot \frac{71}{72} + \frac{8}{9} \right) = \frac{71}{72}, \\ x_{3,2} = \frac{1}{3} \left(\frac{71}{72} + 2 \cdot \frac{71}{72} \right) = \frac{71}{72}. \end{cases}$$

За два шага мы получили приближение с точностью

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \max_{i=1,2,3} |x_i^* - x_{i,k}| = \max \left\{ |x_1^* - x_{1,2}|, |x_2^* - x_{2,2}|, |x_3^* - x_{3,2}| \right\} = \\ &= \max \left\{ \left| 1 - \frac{71}{72} \right|, \left| 1 - \frac{71}{72} \right|, \left| 1 - \frac{71}{72} \right| \right\} = \frac{1}{72} \approx 0,014. \end{aligned}$$

Обычно точное решение системы не известно, и для определения точности k -го приближения используются не x_i^* , а найденные на предыдущей итерации $x_{i,k-1}$.

Пример 12. Методом итераций Зейделя решить с точностью до 0,0001 систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7 & (\text{I}), \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6 & (\text{II}), \\ 1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,6x_3 = 2,2 & (\text{III}). \end{cases}$$

Решение. Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 & (\text{I+II}), \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 & (2 \cdot \text{III} + \text{II} - \text{I}), \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 & (\text{III}-\text{II}), \end{cases}$$

далее запишем систему в виде

$$\begin{cases} 10x_1 = 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3 + 1,9, \\ 10x_2 = -2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3 + 9,7, \\ 10x_3 = 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3 - 1,4. \end{cases}$$

Разделив каждое уравнение системы на 10, приведем систему к виду (15):

$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 + 0,19, \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 + 0,97, \\ x_3 = 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 - 0,14. \end{cases}$$

Проверим условие сходимости для этой системы:

$$M = \begin{vmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{vmatrix}.$$

Производные $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}$ являются константами. Суммы модулей элементов каждой строки матрицы M равны:

$$0,53, \quad 0,75, \quad 0,57.$$

Следовательно, условие сходимости выполняется. В качестве первого приближения

$$x_{1,0}, \quad x_{2,0}, \quad x_{3,0}, \quad x_{4,0}$$

возьмем свободные коэффициенты исходной системы уравнений. Процесс итераций приведем в таблице:

n	x_1	x_2	x_3
0	0,1900	0,9700	-0,1400
1	0,2207	1,0703	-0,1915
2	0,2354	1,0988	-0,2118
3	0,2424	1,1088	-0,2196
4	0,2454	1,1124	-0,2226
5	0,2467	1,1138	-0,2237

Окончание табл.

n	x_1	x_2	x_3
6	0,2472	1,1143	-0,2241
7	0,2474	1,1145	-0,2242
8	0,2475	1,1145	-0,2243
9	0,2475	1,1146	-0,2243
10	0,2475	1,1146	-0,2243

Как видно из таблицы, мы нашли решение системы уравнения с точностью 0,0001 за десять итераций.

Ответ: $x_1 \approx 0,2475$, $x_2 \approx 1,1146$, $x_3 \approx -0,2243$.

В заключение можно отметить, что точность итерационных методов ограничена точностью компьютерных расчетов и точностью, с которой заданы коэффициенты и свободные члены рассматриваемой системы. Если коэффициенты и свободные члены системы – приближенные числа с l верными десятичными знаками, то при отсутствии других погрешностей корни можно найти с точностью до $n = l$ десятичных знаков. Если коэффициенты имеют различную точность, то величина l выбирается исходя из наименее точного коэффициента.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ПРЯМОГО ХОДА МЕТОДА ГАУССА

При решении системы уравнений методом исключения Гаусса мы приводили матрицу системы к треугольному виду. Определитель треугольной матрицы может быть легко вычислен как произведение ее диагональных элементов. Можно показать, что в процессе исключения элементов величина определителя не меняется. Знак определителя меняется при перестановке его столбцов или строк. Поэтому значение определителя после приведения матрицы B к треугольному виду можно вычислить по формуле

$$\det B = (-1)^k \prod_{i=1}^n a_{ii},$$

где a_{ii} – диагональные элементы преобразованной матрицы, k – число перестановок строк (или столбцов) матрицы, которое было сделано при приведении ее к треугольному виду (например, для получения ненулевого ведущего элемента на каком-то этапе исключения).

Пример 13. Вычислить определитель матрицы B :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу B к треугольному виду.

1. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -1$, к третьей – первую, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{2}{3}$, к четвертой – первую, умноженную на $-\frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{2}{3}$:

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{4}{9}$, к четвертой – вторую, умноженную на $-\frac{a'_{42}}{a'_{22}} = -\frac{2}{9}$:

$$B'' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{9} & \frac{25}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

3. Прибавим к четвертой строке третью, умноженную на $-\frac{a''_{44}}{a''_{33}} = -\frac{1}{7}$:

$$B''' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{9} & \frac{25}{9} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

4. Перестановок строк или столбцов не производилось, поэтому $k = 0$,

$$\det B = (-1)^k \prod_{i=1}^n a_{ii} = (-1)^0 \cdot 3 \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -2.$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА

Пусть известны значения функции $y = f(x)$ в некоторых точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

Требуется определить значение функции $f(x)$ в точке x , которая принадлежит отрезку $[x_0; x_n]$ и не совпадает ни с одной точкой $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Для этого необходимо найти некоторую функцию $F(x)$, заданную аналитически, в определенном смысле близкую к $f(x)$, значения которой совпадают со значениями функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис. 11):

$$F(x_0) = y_0; F(x_1) = y_1; F(x_2) = y_2; \dots; F(x_n) = y_n. \quad (1)$$

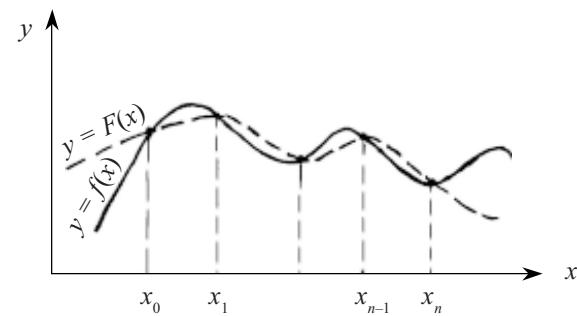


Рис. 11

Нахождение такой функции $F(x)$ называется *интерполяцией*, а точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – узлами интерполяции. Функция $F(x)$ называется *интерполирующей функцией*. Будем искать интерполирующую функцию $F(x)$ в виде полинома $L_n(x)$ степени n :

$$L_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (2)$$

Необходимо определить коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n этого полинома. Требуя для $L_n(x)$ выполнения условия (1), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n, \\ y_1 = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n, \\ \dots, \\ y_n = a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n. \end{cases} \quad (3)$$

Итак, имеем линейную систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными: a_0, a_1, \dots, a_n . Можно показать, что определитель системы (3) отличен от нуля. Поэтому интерполяционный полином (2) существует и единственен. Полином, который получается в результате решения системы (3) имеет вид

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} + \\ + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} + \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} + \\ + \dots + \\ + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}. \quad (4)$$

Этот полином называется интерполяционным полиномом Лагранжа.

Пример 14. Получить полином второй степени относительно x , который при $x=1$ принимал бы значение 5, при $x=2$ значение 13, при $x=5$ значение 17.

Решение. В формуле (4) необходимо положить

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & x_1 &= 2, & x_2 &= 5, \\ y_0 &= 5, & y_1 &= 13, & y_2 &= 17 \end{aligned}$$

и $n=2$, тогда получим

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 5 \cdot \frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)} + 13 \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)} + 17 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)} = \\ &= -\frac{5}{3}x^2 + 13x - \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, имея три узла интерполяции, мы получили интерполяционный полином второго порядка.

Пример 15. Найти значение функции, заданной таблично, в точке $x=0,263$.

n	x	y
0	0,05	0,050042
1	0,10	0,100335
2	0,17	0,171657
3	0,25	0,255342
4	0,30	0,309336
5	0,36	0,376403

Решение. Воспользуемся формулой (4), положив $n=5$, $x=0,263$.

Величины x_0, x_1, \dots, x_5 и y_0, y_1, \dots, y_5 возьмем из таблицы. В ходе вычислений получим сумму шести дробей, величины которых приведем в таблице:

Слагаемое	Числитель	Знаменатель	Дробь
0	0,00000071	-0,00009300	-0,00760509
1	0,00000092	0,00002730	0,03385452
2	0,00000162	-0,00001660	-0,09759280
3	0,00001159	0,00001320	0,87790937
4	-0,00000407	-0,00001950	0,20880007
5	-0,00000155	0,00010107	-0,01536606

Умножив величины дробей на соответствующие значения y_i и сложив их, получим ответ.

Ответ: $L_5(0,263) = 0,269236$.

Между узлами интерполяции значения функции $f(x)$ и полинома $L_n(x)$ различны. Погрешность интерполяции полиномом Лагранжа оценивается по формуле

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n+1}(x - x_i) \right|,$$

где $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$, $x_0 \leq x \leq x_{n+1}$ – максимальное значение производной $n + 1$ -го порядка функции $f(x)$ на отрезке интерполяирования,

$$\prod_{i=0}^{n+1}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n+1}).$$

Для осуществления такой оценки функция $f(x)$ в рассматриваемой области должна иметь все производные до $n + 1$ -го порядка включительно.

Полиномиальная интерполяция является наиболее простой. Она удобна тем, что производные и интегралы полинома могут быть легко вычислены. Кроме интерполяционного полинома Лагранжа, существуют другие интерполяционные полиномы, например полином Ньютона.

Список использованной литературы

Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ, 2003. (Лаборатория знаний).

Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002.

Зализняк В. Е. Основы научных вычислений: Введение в численные методы для физиков. М.: Едиториал УРСС, 2002.

Поршинев С. В. Вычислительная математика: Курс лекций. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов. М.: Физматлит, 2003.

Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Киев: Наук. думка, 1970.

Учебное издание

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
(нелинейные уравнения, системы линейных уравнений,
интерполяция)

Методические указания
по курсу «Численные методы и математическое моделирование»
для студентов 2 курса физического факультета

Составители
Чернышев Владимир Артурович,
Захаров Антон Юрьевич

Редактор и корректор М. А. Овечкина
Компьютерная верстка Н. В. Комардина

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе УрГУ

Лицензия ИД № 05974 от 03.10.2001. Темплан 2004 г., поз. 19.
Подписано в печать 13.02.2004. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Уч.-изд. л. 2,3. Усл. печ. л. 2,55. Тираж 200 экз. Заказ .
Издательство Уральского университета. 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ». 620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.